הרצאה 2

מספרים מרוכבים – תרגול נוסף

תרגיל 1

נתון הביטוי $A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

א. הראה ש A הוא מספר ממשי טהור לכל n טבעי.

ב. נתון: k מספר טבעי, $n = 3k$. הוכח: $A = 2$.

פתרון

א. נשים לב ש $\bar{z}^n = \overline{z^n}$. נסמן $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ואז $A = z^n + \bar{z}^n = z^n + \overline{z^n}$ ומכיוון שמספר מרוכב ועוד הצמוד שלו נותן מספר ממשי נקבל ש A מספר ממשי.

ב. נחשב את z^3.

$$z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$$

ואז $z^{3k} = \left(z^3\right)^k = 1^k = 1$ ומכיוון ש $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ נקבל גם ש $\bar{z}^{3k} = 1$ ואז $A = 2$.

תרגיל 2

נתון: $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את כל פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$. (הבע כל פתרון בצורה של $a + bi$).

ב. הראה שמכפלת הפתרונות של המשוואה הוא w^3.

ג. נסמן: $\bar{w} = A$, $w^3 = B$. C נקודה על מעגל היחידה (C שונה מ A, B–). חשב את הזווית ACB.

פתרון

א. נחשב תחילה את w^3:

$$w^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = i\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

כעת נפתור את המשוואה:

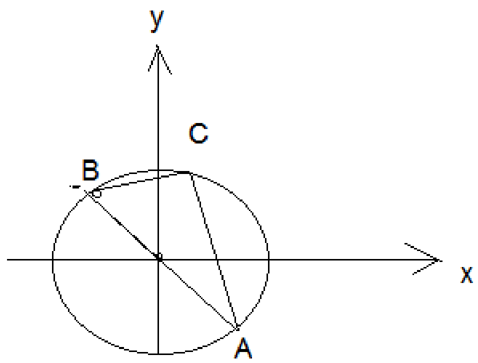
$$z^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z^3 = \cos 135^0 + i\sin 135^0$$
$$z_k = \cos\left(45^0 + 120^0 k\right) + i\sin\left(45^0 + 120^0 k\right)$$
$$z_0 = \cos 45^0 + i\sin 45^0$$
$$z_1 = \cos 165^0 + i\sin 165^0$$
$$z_2 = \cos 285^0 + i\sin 285^0$$

ב. נשתמש בנוסחה

$$z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1, z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$$
$$z_1\cdot z_2=\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\cdot\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$
$$z_1\cdot z_2=\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$z_0\cdot z_1\cdot z_2=\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)\cdot\left(\cos 165^0+i\sin 165^0\right)\cdot\left(\cos 285^0+i\sin 285^0\right)=$$
$$=\cos 495^0+i\sin 495^0=\cos 135^0+i\sin 135^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=w^3$$

ג.



AB קוטר במעגל היחידה וזווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

<u>סדרה הנדסית</u>

אם נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא a_1 ומנתה q אז $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.

<u>תרגיל 3</u>

נתונה הסדרה הנדסית $2+i,1+3i,...$ חשב את סכום שלושה עשר האיברים הראשונים.

<u>פתרון</u>

נחשב תחילה את מנת הסדרה.

$$q=\frac{1+3i}{2+i}\Rightarrow q=\frac{(1+3i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$$

נחשב את q^{13}.

$$q^{13}=\left(q^2\right)^6\cdot q=\left((1+i)^2\right)^6\cdot(1+i)=(2i)^6\cdot(1+i)=-64-64i$$

$$S_{13}=\frac{(2+i)(1+64+64i)}{-i}=\frac{66+193i}{-i}=-193+66i.$$

<u>המאפיין של שדה</u>

המאפיין של שדה $\mathbb{F}$ (מסומן $char\left(\mathbb{F}\right)$) הוא המספר הטבעי n הקטן ביותר כך שמתקיים:

$n\cdot 1_{\mathbb{F}}=1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+...+1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}$ (באגף ימין יש n מחוברים).

אם אין מספר כזה n אומרים שהמאפיין הוא אפס.

באופן כללי, עבור $a\in\mathbb{F}$ ומספר טבעי $0<n$ נסמן $n\cdot a=a+a+...+a$.

<u>דוגמא</u>

$\mathbb{F}=\{0,1,a,b\}$

$\cdot$	0	1	a	b		$+$	0	1	a	b
0	0	0	0	0		0	0	1	a	b
1	0	1	a	b		1	1	0	b	a
a	0	a	b	1		a	a	b	0	1
b	0	b	1	a		b	b	a	1	0

בדוגמא הנ"ל המאפיין הוא 2 מכיוון ש $2\cdot 1_{\mathbb{F}}=1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}$.

<u>תכונות של שדה ממאפיין סופי</u>

<u>תכונה 1</u>

יהא $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין $0<n$. הוכח שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $n\cdot a=0_{\mathbb{F}}$.

<u>הוכחה</u>

$n\cdot a=a+a+...+a=1_F\cdot a+1_F\cdot a+...+1_{\mathbb{F}}\cdot a=\left(1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+...+1_{\mathbb{F}}\right)\cdot a=0_{\mathbb{F}}\cdot a=0_{\mathbb{F}}$.

<u>תכונה 2</u>

יהא $\mathbb{F}$ שדה סופי. אזי $char\left(\mathbb{F}\right)|\#\mathbb{F}$.

<u>טענת עזר 1</u>

נסמן $H=\{0,1,1+1,1+1+1,...,(n-1)\cdot 1\}$, $n=char\mathbb{F}$ אז $n=\#H$.

<u>הוכחה</u>

נניח שבקבוצה הנ"ל יש שני מספרים שווים ז"א $k\cdot 1=t\cdot 1$ כאשר $0\le k\ne t\le n-1$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $k<t$ ואז נקבל ש $k\cdot 1=t\cdot 1$ ומכלל הצמצום נקבל ש $(t-k)\cdot 1=0$, מכיוון ש $0\le t-k\le n-1$ בסתירה לכך ש $n=char\mathbb{F}$.

סה"כ קיבלנו ש $n=\#H$.

<u>טענת עזר 2</u>

לכל $f\in\mathbb{F}$ $\bigcup_{f\in\mathbb{F}}(f+H)=\mathbb{F}$ כאשר $f+H:=\{f+h:h\in H\}$.

<u>דוגמא</u>

נתבונן בדוגמא הקודמת.

$H=\{0,1\}$.

$$0+H=\{0+0,0+1\}=\{0,1\}$$
$$1+H=\{1+0,1+1\}=\{0,1\}$$
$$a+H=\{a+0,a+1\}=\{a,b\}$$
$$b+H=\{b+0,b+1\}=\{a,b\}$$

<u>הוכחה</u>

מהמוגדרות נקבל שלכל $f\in\mathbb{F}$ $f+H\subseteq\mathbb{F}$ ולכן $\bigcup_{f\in\mathbb{F}}(f+H)\subseteq\mathbb{F}$.

נשאר להוכיח ש $\mathbb{F}\subseteq\bigcup_{f\in F}(f+H)$.

יהי $a\in\mathbb{F}$ מכיוון ש $0\in H$ נקבל ש $a\in a+H$, ולכן $a\in\bigcup_{f\in F}(f+H)$.

סה"כ קיבלנו ש $\bigcup_{f\in F}(f+H)=\mathbb{F}$.

<u>טענת עזר 3</u>

לכל $f,g\in\mathbb{F}$ מתקיים אחד מהשניים או ש $f+H=g+H$ או ש $(f+H)\cap(g+H)=\phi$.

<u>הוכחה</u>

נניח ש $a\in(f+H)\cap(g+H)$ ונוכיח ש $(f+H)\subseteq(g+H)$ ובאופן דומה ניתן להוכיח ש $(g+H)\subseteq(f+H)$.

מכיוון ש $a\in f+H$ אז קיים $h_1\in H$ כך ש $a=f+h_1$.

מכיוון ש $a\in g+H$ אז קיים $h_2\in H$ כל ש $a=g+h_2$.

סה"כ נקבל ש $f+h_1=g+h_2 \Leftarrow g+(-g)+f+h_1=g+h_2$ מתכונת הצמצום נקבל ש $-g+f+h_1=h_2$ ושוב מתכונת הצמצום וכלל החילוף נקבל ש $f-g=h_2-h_1\in H$.

באותו אופן ניתן להראות ש $g-f=h_1-h_2\in H$.

יהי $b\in f+H$ ז"א קיים $h\in H$ כך ש $b=f+h$.

$f+h=g+(g-f)+h=g+h_1-h_2+h\in g+H$.

__טענת עזר 4__

לכל $f\in F$ מתקיים $\#H=\#(f+H)$.

__הוכחה__

עבור $h\in H$ נתאים את האיבר $f+h\in f+H$.

מתכונת הצמצום נקבל שאם $h_1,h_2\in H$ כך ש $h_1\neq h_2$ אז $f+h_1\neq f+h_2$ ולכן $\#H\leq\#(f+H)$.

מהגדרת $f+H$ נקבל שאם $g\in f+H$ אז קיים $h\in H$ כך ש $g=f+h$ ולכן $\#H\geq\#(f+H)$.

סה"כ קיבלנו ש $\#H=\#(f+H)$.

__הוכחת תכונה 2__

אם $p=char\mathbb{F}$ מטענת עזר 1 נקבל ש $p=\#H$ מטענות עזר 3 ו 4 נקבל ש $\mathbb{F}$ איחוד של קבוצות זרות מגודל p ולכן $p|\#\mathbb{F}$.