מתרגל מיכאל טויטו

דוא"ל DexlessDK@gmail.com

שעות קבלה בתאום במייל

- תרגילי בית במתכונת שבועית(בקירוב)
- אתר הקורס בwww.math-wiki.com
- יהיה בוחן

שדות סקלריים ווקטורים

הגדרה - שדה סקלרי

עבור תחום $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n}$(בד"כ $n=2,3$), שדה סקלרי הוא פונקציה $f:\underset{\text{dot}\mapsto\text{scalar}}{\Omega\to\mathbb{R}}$

למשל:
$$f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}$$
$$f\left(x,y,z\right)=e^{x^{2}}\cdot y-z$$

הגדרה - שדה וקטורי

שדה וקטורי הוא פונקציה $F:\underset{\text{dot}\mapsto\text{vector}}{\Omega\to\mathbb{R}^{n}}$

- ב$\mathbb{R}^{3}$ נכתוב

$$F\left(x,y,z\right)=F\left(\vec{r}\right)=\left(F_{1}\left(\vec{r}\right),F_{2}\left(\vec{r}\right),F_{3}\left(\vec{r}\right)\right)$$

- ב$\mathbb{R}^{2}$ נכתוב

$$F\left(x,y\right)=F\left(\vec{r}\right)=\left(F_{1}\left(\vec{r}\right),F_{2}\left(\vec{r}\right)\right)=F_{1}\cdot\hat{\imath}+F_{2}\cdot\hat{\jmath}$$

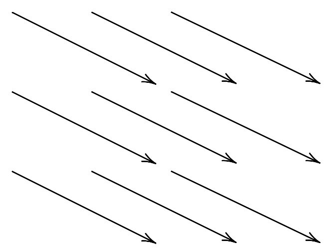
כאשר $\hat{\imath}=\left(1,0\right)$ ו$\hat{\jmath}=\left(0,1\right)$

שרטוט

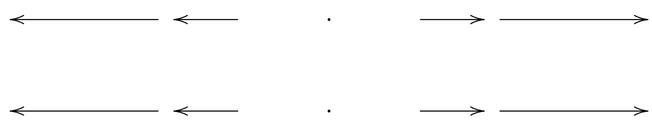
כיצד משרטטים שדה וקטורי נתון?
תשובה: מציבים נקודות שונות עד לקבלת תמונה כללית.

דוגמאות

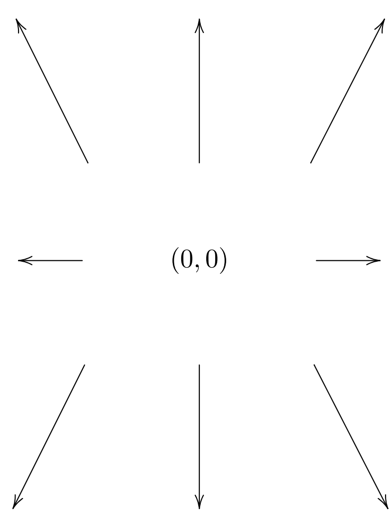
1. $F(x,y)=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}=(2,-1)$ (שדה וקטורי קבוע)



2. $F(x,y)=x\hat{\imath}=(x,0)$



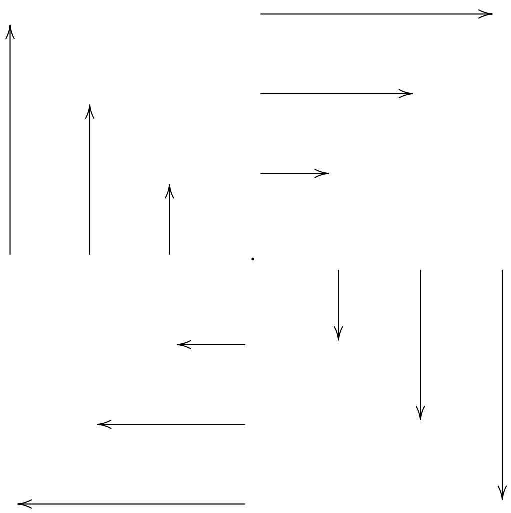
3. $F(x,y)=x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$



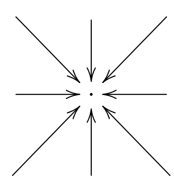
4. $F(x,y)=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$. נשים לב שמתקיים $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ - זוהי מטריצת סיבוב ב-90°

כזכור: מטריצת הסיבוב בזוית α נגד כיוון השעון היא $R\left(\alpha\right)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

לכן, השדה הוקטורי הזה הוא:

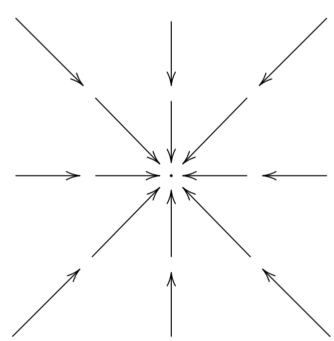


ננסה להגיע משרטוט את השדה הוקטורי



זהו השדה הווקטורי $F\left(x,y\right)=\left(-x,-y\right)$, או $F\left(\vec{r}\right)=-\vec{r}$

דוגמה אחרת:



זהו השדה הווקטורי $F\left(\vec{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{\left\Vert \vec{r}\right\Vert }=\left(\frac{-x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}},\frac{-y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\right)$

אופרטורים דיפרנציאליים

הסימון ∇ "נבלה" מייצג את האופרטור "דל" ב$\mathbb{R}^{n}$.

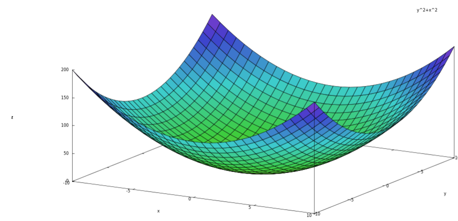
$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_{1}},...\frac{\partial}{\partial x_{n}}\right)$$

עבור שדה סקלרי(דיפרנציאבילי) f, $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}},...\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\right)$ יקרא הגרדיאנט של f.

גרדיאנט הופך <u>שדה סקלרי</u> $f:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}$ <u>לשדה וקטורי</u> $\nabla f:\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}^{n}$.

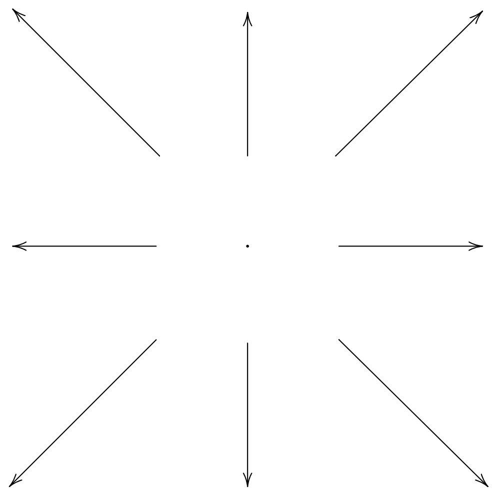
דוגמאות

1. $f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}$. זהו שדה סקלרי - נצייר אותו ב$\mathbb{R}^{3}$:



$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(2x,2y\right)=\left(2x,2y\right)$$

זהו שדה סקלרי - נצייר אותו ב$\mathbb{R}^2$:



תזכורת

בכל נקודה, ∇f מצביע בכיוון ההשתנות הגבוע ביותר בפונקציה f ו$\|\nabla f\|$ הוא קצב ההשתנות הזו. ∇f מאונך תמיד למשטיח עקומות רמה של f(שבהם $f=c$ כאשר c קבוע)

הגדרה

שדה ווקטורי $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ נקרא <u>שדה פוטנציאלי</u> אם קיים שדה סקלרי f כך ש$F=\nabla f$.
f שכזו נקראת "<u>הפוטנציאל</u>" של F.

דוגמה: x^2+y^2 היא הפוטנציאל של $(2x,2y)$

הגדרה

דיברגרנץ של שדה וקטורי F הוא שדה סקלרי $\text{div}F$ המוגדר על ידי

$$\text{div}F=\nabla\cdot F=\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...\frac{\partial}{\partial x_n}\right)}_{\nabla}\cdot\underbrace{(F_1,F_2,...F_n)}_{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+...+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

דוגמה

חשב את הדיברגרנץ של $F=\left(x^2y,z,xyz\right)$

פתרון

$$\nabla \cdot f = \operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = \boxed{3xy}$$