...

תרגיל

תהי $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות ממשירות רציפות. הראו שהקבוצה

$$\{x\in\mathbb{R}|\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ converges at x}\}$$

היא מטיפוס $F_{\sigma\delta}$(חיתוך בן מנייה של איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות)

פתרון

ניזכר כי $\mathbb{R}$ הוא מרחב שלם, ולכן f_n מתכנסת בנקודה x או"א $f_n(x)$ היא סדרת קושי. ז"א:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{m,n\geq N}\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\leq\varepsilon$$

אפשר לעדן קצת:

$$\forall_{K\in\mathbb{N}}\exists_N\forall_{m,n\geq N}\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\leq\frac{1}{K}$$

לסיום:

$$\{x\in\mathbb{R}|f_n\text{ converges at }x\}=\{x\in\mathbb{R}|f_n(x)\text{ is cauchy}\}=$$

$$=\underbrace{\bigcap_{K=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{N=1}^{\infty}\underbrace{\bigcap_{m,n=N}^{\infty}\underbrace{\left\{x\middle|\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\leq\frac{1}{K}\right\}}_{\text{close - }F}}_{F}}_{F_\sigma}}_{(F_\sigma)_\delta=F_{\sigma\delta}}$$

($\bigcap\equiv$לכל, $\bigcup\equiv$קיים)

הפונקציות f_m,f_n רציפות ולכן גם $\left|f_m^{(x)}-f_n^{(x)}\right|$ רציפות.

$$\left\{x\middle|\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\leq\frac{1}{K}\right\}=\left|f_m-f_n\right|^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{K}\right]\right)$$

הערה: זו גם קבוצה מטיפוס $G_{\delta\sigma\delta}$

תרגיל

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x\in U|f\text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

פתרון

לכל $x\in U,\varepsilon>0$ נגדיר את התנודה("oscillation") של f בכדור $B\left(x,\varepsilon\right)$ ע"י

$$\omega\left(x,\varepsilon\right):=\sup\left\{ \left|f\left(s\right)-f\left(t\right)\right|\left|s,t\in B\left(x,\varepsilon\right)\right.\right\}$$

ונקודתית ע"י $\omega\left(x\right):=\inf\left\{ \omega\left(x,\varepsilon\right)\left|\varepsilon>0\right.\right\}$.

מאמר מוסגר: 1. $f\left(x\right)=x^{2}$, $\omega\left(x\right)=\lim_{\varepsilon\to0^{+}}\omega\left(x,\varepsilon\right)$, $\omega\left(0\right)=0$.

2. עבור פונקציית הביסייד $f\left(x\right)=\begin{cases} 1 & x\geq0\\ 0 & x<0 \end{cases}$, $\omega\left(3,2\right)=0$ אבל $\omega\left(0\right)=1$ כי לכל $\varepsilon>0$, $\omega\left(0,\varepsilon\right)=1$, ואז ה-$\inf$ גם יהיה אחד.

בעצם, רואים שהתנודה היא 0 כאשר הפונקציה רציפה בנקודה - אבל עדיין צריך להוכיח את זה.

אנו טוענים שלכל $a\in\mathbb{R}$ ממשי הקבוצה $E_{a}=\left\{ x\in U\left|\omega\left(x\right)<a\right.\right\}$ היא פתוחה.

הוכחת הטענה: יהי $x_{0}\in E_{a}$. ישנו $\varepsilon_{0}>0$ כך ש

$$\omega\left(x_{0},\varepsilon_{0}\right)=\sup\left\{ \left|f\left(s\right)-f\left(t\right)\right|\left|s,t\in B\left(x_{0},\varepsilon_{0}\right)\right.\right\}<a$$

אחרת $\omega\left(x_{0}\right)$ שהוא ה-$\inf$ של כולם לא יהיה קטן מ-a.
לכן, לכל $x\in B\left(x_{0},\frac{\varepsilon_{0}}{2}\right)$,

$$\omega\left(x,\frac{\varepsilon_{0}}{2}\right)=\sup\left\{ \left|f\left(s\right)-f\left(t\right)\right|\left|s,t\in B\left(x,\frac{\varepsilon_{0}}{2}\right)\right.\right\}\leq$$

$$\leq\sup\left\{ \left|f\left(s\right)-f\left(t\right)\right|\left|s,t\in B\left(x_{0},\varepsilon_{0}\right)\right.\right\}=\omega\left(x_{0},\varepsilon_{0}\right)<a$$

ומכאן כ-$\inf$, $\omega\left(x\right)<a$.
$\Longleftarrow E_{a}$ פתוחה, כי אם $x_{0}\in E_{a}$ הכדור $B\left(x_{0},\frac{\varepsilon_{0}}{2}\right)$ מוכל כולו ב-E_{a}

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x אם ורק אם $\omega\left(x\right)=0$, ולכן:

$$\left\{ x\left|f\text{ is continuou as }x\right.\right\}=\left\{ x\left|\omega\left(x\right)=0\right.\right\}\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left\{ x\left|\omega\left(x\right)<\frac{1}{n}\right.\right\}}_{\text{open}\equiv E_{\frac{1}{n}}}}_{G_{\delta}}$$

הערה

ניתן להוכיח את זה בכל מרחב מטרי.

תזכורת - משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג

אם $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq +\infty$ כולן מדידות לבג, אזי פונקציית הגבול שלהן קיימת ומדידה ומתקיים

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

תרגיל

תהי $f \geq 0$ פונקציה מדידה ואי־שלילית. המקיימת $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$. הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית־ממש היא בעלת מידה אפס.

פתרון

נגדיר $E := \{x \in X | f(x) > 0\}$ ו־$f_n(x) := n \cdot f$. קל לראות שהסדרה $\{f_n\}$ עומדת בתנאי משפט ההתכנסות המונוטונית, ולכן

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X n \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} n \cdot \underbrace{\int_X f \, \mathrm{d}\mu}_{=0} = 0$$

נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$. $E \subseteq X$ ולכן

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) \mathrm{d}\mu \geq \int_E \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) \mathrm{d}\mu$$

אבל, לכל $x \in E$ $f(x) > 0$ ולכן

$$\left(f_n|_E\right)(x) = n \cdot f(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

שזה בעצם

$$\int_E \infty \, \mathrm{d}\mu = \infty \underbrace{\mu(E)}_{>0} = \infty$$

וזו סתירה!

תרגיל

חשבו את הגבול

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cdot \log\left[2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right] \, \mathrm{d}m(x)$$

(הערה: m זו מידת לבג)

פתרון

ניתן לרשום את הגבול בצורה הבאה:

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\cdot I_{(a,n)}\left(x\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)$$

ברוח זו, נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות לבג(כי הן רציפות) הבאה

$$f_{n}\left(x\right):=\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\cdot I_{(0,n)}\left(x\right)$$

נטען כעת כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה $f_n\le f_{n+1}$. יש להראות שלכל $0<x<\infty$

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\log\left(2x\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\cdot I_{(0,n)}\left(x\right)\le\underbrace{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\cdot I_{(0,n+1)}\left(x\right)}_{f_{n+1}}$$

נחלק למספר מקרים:

1. $x\ge n+1$ - צ"ל $0\le0$(כי שני האינדיקטורים מתאפסים) - ברור!
2. $n\le x\le n+1$ - צ"ל $0\le f_{n+1}$ - ברור!
3. $0<x<n$ - צ"ל

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\le\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$$

נראה זאת בשני שלבים:

א. $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\le\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

ב. $\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\le\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$.

הוכחה: א. היחס הוא

$$\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{\left(n+1\right)^{n+1}\left(n-x\right)^{n}}{\left(n+1-x\right)^{n}}\le\cancel{\frac{\left(n+1\right)^{n+1}\cdot\left(n-0\right)^{n}}{\left(n+1-x\right)^{n+1}\cdot n^{n}}}$$

זה לא עובד - נמצא הוכחה אחרת(למשל ע"י חקירת פונקציות)

ב. פונקציית הקוסינוס יורדת בקטע $(0,1)$, ולכן למרות ש$\frac{x}{n}\ge\frac{x}{n+1}$, $\cos\left(\frac{x}{n}\right)\le\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$. נוסיף 2 ונפעיל $\log$ לקבל את הדרוש.

ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית

$$I=\int_{(0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\cdot I_{(0,n)}\left(x\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)=$$

$$= \int_{(0,\infty)} e^{-x} \cdot \log(3) \cdot \underbrace{\cancel{I_{(0,\infty)}}}_{\equiv 1} \, \mathrm{d}m(x) =$$

$$= \log(3) \cdot \int_{(0,\infty)} e^{-x} \, \mathrm{d}m(x) = \log(3)$$