

## מופשטת 1 תשע"ו - תרגיל בית 2

לאורך התרגיל נסמן את המחלק המשותף המקסימלי של שני מספרים  $a, b \in \mathbb{Z}$  ע"י  $(a, b)$ .

1. עבור שני מספרים  $a, b \in \mathbb{Z}$  הראו שמתקיים  $a|b \iff b\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z}$ .

2. יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  ונסמן  $d = (a, b)$ . הוכיחו כי  $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ .

3. נגדיר: **הכפולה המשותפת המינימלית** (lcm) של שני מספרים  $a, b$  היא המספר

$$[a, b] = \min_{k \in \mathbb{N}} \{k \mid a|k \wedge b|k\}$$

$$\text{למשל } [15, 6] = 30.$$

(א) הוכיחו כי אם  $a|m$  וגם  $b|m$  אז  $[a, b]|m$  (הנחיה: נסמן  $t = [a, b]$ , רשמו  $m = qt + r$  ותבדקו מה הנתונים מגלים על  $r$ )

(ב) הוכיחו כי  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = [a, b]\mathbb{Z}$ .

4. חשבו את המחלק המשותף המקסימלי של זוגות המספרים הבאים:

(א)  $24, -11$

(ב)  $117, 22$

(ג)  $785, 2780$

5. עבור המונואידים הכפליים והאיבריים הבאים, האם האיבר הפיך? אם כן, מי ההופכי שלו? (טיפ: העזרו בשאלה הקודמת)

(א)  $\mathbb{Z}_{24}$  ב  $-11$

(ב)  $\mathbb{Z}_{117}$  ב  $22$

6. פתרו את המשוואות הבאות: (טיפ: היעזרו בשאלה הקודמת)

$$\text{(א) } \mathbb{Z}_{24} \text{ ב } -11x + 2 = 19$$

$$\text{(ב) } \mathbb{Z}_{117} \text{ ב } 20x + 1 = 3 - 2x$$

7. יהי  $p$  מספר ראשוני. כמה איברים הפיכים יש במונואיד הכפלי  $\mathbb{Z}_p$ ? כמה איברים הפיכים יש במונואיד הכפלי  $\mathbb{Z}_{p^2}$ ?

8. רשמו את לוחות הכפל של החבורות  $U_5, U_6$ . כאשר  $U_n = U(\mathbb{Z}_n, \cdot)$  היא חבורת אוילר.

9. תהי  $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  חבורה אבלית. נסמן  $b = a_1 a_2 \cdots a_n$ . הוכיחו כי  $b^2 = e$ .