מד"ר לינארית מסדר n

$$a_n(x)\,y^{(n)}+...+a_2(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$$

$b(x)=0$ המקרה ההומוגני

$b(x)\neq 0$ המקרה האי הומוגני

הוכחנו שבמקרה ההומוגני קבוצת הפתרונות היא מרחב ווקטורי ובמקרה האי הומוגני $y(x)=y_p(x)+y_c(x)$ כאשר:

$y(x)$ פתרון כללי של האי הומוגני

$y_p(x)$ פתרון פרטי של ההומוגני

$y_c(x)$ פתרון כללי של האי הומוגני(פתרון משלים).

במקרה ההומוגני: מה מימד המרחב הווקטורי?

משפט

למד"ר לינארית הומוגנית מסדר n בצורה נורמלית ($a_n(x)=1$), קבוצת הפתרונות היא מרחב ווקטורי ממימד n.

הוכחה

תלוי על משפט הקיום והיחידות.

משפט הקיום והיחידות מבטיח פתרון אחד ויחיד כך שעבור $\alpha_1,...\alpha_n$ קבועים:

$$y(x_0)=\alpha_1$$

$$y'(x_0)=\alpha_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_n$$

נבנה פתרונות מיוחדים $y_1(x),y_2(x),...y_n(x)$ על ידיד הדרישות:

$$Y_i^{(j)}(x_0)=\begin{cases}0 & j\neq i-1\\ 1 & j=i-1\end{cases},\, i=1,2,...n, j=0,1,...n-1$$

נראה שאלה הם בסיס למרחב הפתרונות:

(א)הם בת"ל נניח שקיימים קבועים $\alpha_1, ...\alpha_n$ כך ש= $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+...+\alpha_n y_n(x)$ 0 לכל x.

נציב $x_0 = 0 \Leftarrow \alpha_1 = 0$.

נגזור $\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + ... + \alpha_n y_n'(x) = 0$

נציב $x = x_0 \Leftarrow \alpha_2 = 0$

גוזרים שוב ושוב, מציבים $x = x_0$ ומקבלים $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, לכן הם בת"ל

(ב)פריסה ניקח פתרון כלשהו $y(x)$ של המד"ר.

נסתכל על $z(x) = y(x) - \left[y(x_0) y_1(x) + y'(x_0) y_2(x) + ... + y^{(n-1)}(x_0) y_n(x)\right]$.

זה פתרון של המד"ר:

$$z(x_0) = 0$$

$$z'(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$z^{(n-1)}(x_0) = 0$$

לפי משפט הקיום והיחידות $z(x) = 0$ לכל x.

שאלה

אם נתונים מספר פתרונות של מד"ר, איך ניתן להבחין שהם תלויים לינארית? (אפילו רלוונטי כאשר נתונים פונקציות שאינן פתרונות של מד"ר)

הגדרה

אומרים שהפונקציות $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ הם ב"ת לינארית בקטע I אם הקבועים היחידים $\alpha_1, ...\alpha_n$ שעבורם $\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$ לכל $x \in I$ הם $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

דוגמה פשוטה

$$y_1(x) = x, y_2(x) = |x|$$

בקטע $[0,1]$ $y_1 - y_2 = 0$ - ת"ל

בקטע $[-1,0]$ $y_1 + y_2 = 0$ - ת"ל

בקטע $[-1,1]$ בת"ל

הגדרה

ורונסקיאן (Wronkian) של $y_1, y_2, ...y_n$ גזירות $n-1$ פעמים. $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ היא הפונקציה

$$W(y_1, y_2, ...y_n) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

משפט

אם $y_1, y_2, ...y_n$ הם ת"ל אזי $W(y_1, y_2, ...y_n) = 0$

הוכחה

בהנחה של תלות, קיימים, לא כולם אפס, כך ש$\alpha_1 y_1(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$ לכל x בקטע מסויים. ניתן לגזור את הפונקציות $n-1$ פעמים:

$$\alpha_1 y_1'(x) + ... + \alpha_n y_n'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, לכן למטריצה יש ווקטור לא טריוויאלי בגרעין, ולכן ה$\det$ הוא 0.

בכיוון ההפוך זה לא נכון!

$$y_1 = x^3, y_2 = |x|^3, I = \mathbb{R}$$

y_2 גזיר ב$x = 0$ (בניגוד ל$|x|$)

$$y_1' = 3x^2, y_2' = 3\text{sgn}(x)\, x^2$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^3 & \text{sgn}(x)\, x^3 \\ 3x^2 & 3\text{sgn}(x)\, x^2 \end{vmatrix} = 0$$

משפט

אם $y_1,...y_n$ הם פתרונות מד"ר ליניארית הומוגנית מסדר n ו$W\left(y_1,...y_n\right)=0$, אפילו בנקודה אחת, אזי $y_1,...y_n$ הם תלויים לינארית.

הוכחה

נניח ש$W=0$ בנקודה x_0. קיים ווקטור $\vec{\alpha}\neq 0$ כך ש

$$\begin{pmatrix} y_1\left(x_0\right) & \cdots & y_n\left(x_0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}\left(x_0\right) & \cdots & y_n^{(n-1)}\left(x_0\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסתכל על $z\left(x\right)=\alpha_1 y_1\left(x\right)+...+\alpha_n y_n\left(x\right)$ (לכל x!)

שורה ראשונה $z\left(x_0\right)=0$

שורה שנייה $z'\left(x_0\right)=0$

$\vdots$

שורה אחרונה $z^{(n-1)}\left(x_0\right)=0$

$z\left(x\right)$ הוא צירוף לינארי של $y_1,...y_n$ ולכן גם הוא פתרון המד"ר. אבל תנאיי ההתחלה כולם 0, ולכן לפי משפט הקיום והיחידות $z\left(x\right)=0$ זהותית לכל x, כלומר $y_1,...y_n$ ת"ל.

משפט אבל

אם $y_1,...y_n$ פתרונות של המד"ר $y^{(n)}+a_{n-1}\left(x\right)y^{(n-1)}+...+a_1\left(x\right)y'+a_0\left(x\right)y=0$ ו$W\left(y_1,y_2,...y_n\right)$ אזי $W\left(x\right)=W\left(x_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x}a_{n-1}(t)dt}$.

הוכחה ($n=2$)

$$\begin{cases} y_1''+a_1y_1'+a_0y_1=0 \\ y_2''+a_1y_2'+a_0y_2=0 \end{cases}, W=\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

$$W'=\left(y_1y_2''+y_1'y_2'\right)-\left(y_2y_1''+y_2'y_1'\right)=y_1y_2''-y_2y_1''$$

$$=y_1\left(-a_1y_2'-a_0y_2\right)-y_2\left(-a_1y_1'-a_0y_1\right)=-a_1\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)=-a_1W$$

$$W'=-a_1W$$

$$\frac{W'\left(t\right)}{W\left(t\right)}=-a_1\left(t\right)$$

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = [\ln W(t)]_{x_0}^{x} = -\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt$$

$$\frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

הכנה להוכחה עבור n כללי

איך גוזרים דטקרמיננטה?

$$\left[\det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}\right]' = \det\begin{pmatrix} a'_{11}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} + ... + \det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

הוכחה לn כללי

$$W = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

אם גוזרים שורה ראשונה - זה נותן שורה שנייה - וה$\det$ מתאפס
אם גוזרים שונה שניה - זה נותן שורה שלישית - וה$\det$ מתאפס
$\vdots$
אם גוזרים שורה לפני אחרונה - זה נותן שורה אחרונה - וה$\det$ מתאפס
לכן השורה היחידה שלא מאפסת את הדטרמיננטה היא השורה האחרונה, ולכן

$$W' = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

אבל $y_1, y_2, ...y_n$ פותרים את המד"ר $y_i^{(n)} = -\left[a_{n-1}y_i^{(n-1)} + ... + a_1 y_i' + a_0 y_i\right]$

$$W' = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ a_{n-1}y_1^{(n-1)} + ... + a_1 y_1' + a_0 y_1 & \cdots & a_{n-1}y_n^{(n-1)} + ... + a_1 y_n' + a_0 y_n \end{pmatrix}$$

מחסרים משורה תחתונה:

$a_0\times$שורה ראשונה
$+a_1\times$שורה תחתונה
$\vdots$
$+a_{n-2}\times$ שורה אחת לפני אחרונה.
נשאר $W' = -a_{n-1}W$. כל השאר כמו במקרה $n=2$. ■

הורדת סדר

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b$$

אם נתון פתרון y_0 של המשוואה ההומוגנית יש לחפש פתרון של האי הומוגנית בצורה $y = y_0 z$. אזי z' מקיים משוואה מסדר $n-1$

דוגמה

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = x\ln x$$

$y_0 = x^3$ פותר את $y'' - \frac{6}{x^2}y = 0$. נציב:

$$y = x^3 z$$

$$y' = 3x^2 z + x^3 z'$$

$$y'' = 6xz + 6x^2 z' + x^3 z''$$

$$6xz + 6x^2 z' + x^3 z'' - \frac{6}{x^2}\left(x^3 z\right) = x\ln x$$

$$x^2 z'' + 6xz' = \ln x$$

אם נציב $w = z'$ נקבל:

$$x^2 w' + 6xw = \ln x$$

נפתור: $x^2 w' + 6xw = 0 \Leftarrow \frac{w'}{w} = -\frac{6}{x} \Leftarrow \ln w = -6\ln x + K \Leftarrow w = \frac{C}{x^6}$

נציב $w = \frac{v}{x^6}$

$$x^2\left(\frac{v'}{x^6} - \frac{6v}{x^7}\right)' + 6x\left(\frac{v}{x^6}\right) = \ln x$$

$$v' = x^4 \ln x$$

$$v = \int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C$$

$$z' = w = \frac{\ln x}{5x} - \frac{1}{25x} + \frac{C}{x^6}$$

$$z = \int \left(\frac{\ln x}{5x} - \frac{1}{25x} + \frac{C}{x^6}\right) dx = \frac{(\ln x)^2}{10} - \frac{\ln x}{25} - \frac{C}{5x^5} + D$$

$$y = \overbrace{x^3\left(\frac{(\ln x)^2}{10} - \frac{\ln x}{25}\right)}^{y_p} + \overbrace{\frac{K_1}{x^2} + K_2 x^3}^{y_c}$$

שיטת וריאציית המקדמים

נניח שאנחנו יודעים בסיס $y_1, y_2, ...y_n$ של פתרונות של מש. הומוגנית, ורוצים לפתור אי-הומוגנית.

טענה

אם $y_1, y_2, ...y_n$ הם פתרונות בת"ל של $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$. אזי ניתן לכתוב את הפתרון הכללי של $a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y' = b$ בצורה $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$ כאשר $c_1, c_2, ...c_n$ הם פתרונות של

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

דוגמה

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = x \ln x$$

הפתרונות של ההומוג. הם $\begin{cases} y_1 = x^3 \\ y_2 = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x^3 & \dfrac{1}{x^2} \\ 3x^2 & -\dfrac{2}{x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x\ln x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2} \\ -3x^3 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x\ln x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln x}{5x} \\ -\dfrac{x^4 \ln x}{5} \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \int \frac{\ln x}{5x} dx = \frac{(\ln x)^2}{10} + L_1$$

$$C_2 = \int \frac{-x^4 \ln x}{5} dx = -\left(\frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} \right) + L_2$$

$$y = x^3 \left(\frac{(\ln x)^2}{10} + L_1 \right) + \left(-\frac{x^5 \ln x}{25} + \frac{x^5}{125} + L_2 \right) \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{y = \frac{x^3 (\ln x)^2}{10} - \frac{x^3 \ln x}{25} + K_1 x^3 + \frac{K_2}{x^3}}$$