# הרצאה 4

$$I=\int_{t_A}^{t_B} L\,dt$$ — פעולה

Variational Calcules

חשבון וואריאציות

$$I=\int_{t_A}^{t_B} f_\alpha(x(t))\,dt$$

$f_\alpha$ - הפונקציה של המסלולים השונים

$$\delta I=\delta\int_{t_A}^{t_B} f_\alpha(x(t))\,dt$$

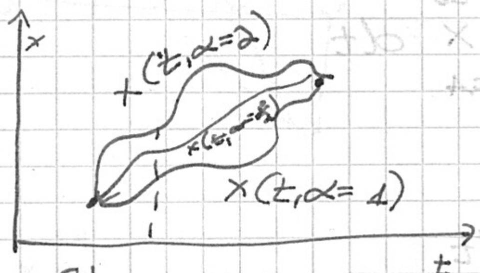
$\delta$ - שינוי סביבה של הפונקציה

$$f_\alpha \to f_{\alpha+\Delta\alpha}$$

$$\delta\int_{t_A}^{t_B} f_\alpha(x,\dot{x},t)\,dt=0$$

הגדרה של ה-אקסטרמום.

$\alpha$ הוא משתנה רציף.




$$I=\int_{t_A}^{t_B} f(x(t,\alpha),\dot{x}(t,\alpha),t)\,dt$$

באקסטרמום

$$\delta I=\frac{\partial I}{\partial\alpha}d\alpha=0$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial f(x,\dot{x},t)}{\partial\alpha}dt=\int_{t_A}^{t_B}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\cdot\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}\right\}dt$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\cdot\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}dt=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)dt$$

$$=\underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_{t_A}^{t_B}}_{=0}-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}dt$$

מכיוון שבקצוות ה-x לא משתנה לפי $\alpha$ כי הנקודות קבועות לכל מסלול.

$$\delta I=\frac{\partial I}{\partial\alpha}d\alpha=\int_{t_A}^{t_B}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)\right\}\frac{\partial x}{\partial\alpha}d\alpha\,dt$$

$$0=\delta I=\int_{t_A}^{t_B}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta x\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

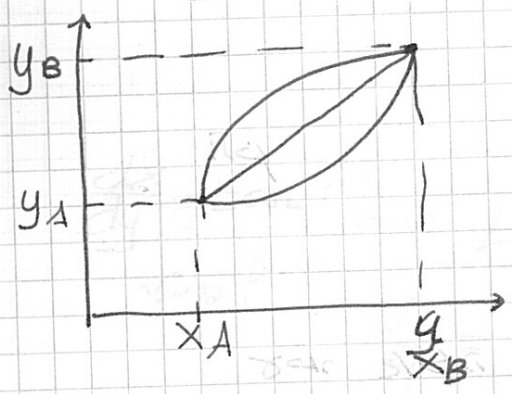
$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

וקיבלנו את E-L.

<u>דוגמאות:</u> א. <u>מסלול הקצר ביותר</u>: במרחב דו מימדי $(x,y)$

מה הוא המסלול הקצר ביותר בין $(x_A,y_A)$ ל $(x_B,y_B)$.




יחידת אורך מסלול $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$S=\int_{x_A,y_A}^{x_B,y_B} ds=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad f\to\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\cancel{x}\ t\to x$$

$$x\to y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ועכשיו

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right)=0$$

אזי

$$y'=dy/dx \qquad \cancel{dy/dx}\ \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=const$$

$$(y')^2=c^2\left(1+y'^2\right)$$

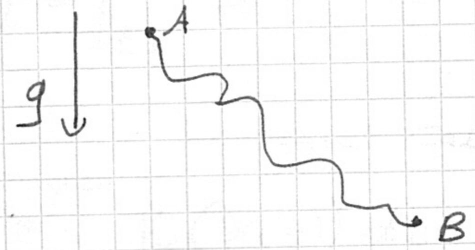
$$y'^2\left(1-c^2\right)=c^2$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\Rightarrow y=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}x+B$$

$$y=Ax+B$$

# ב. בעיית Brachistochrone




$$ds = V\,dt$$
$$\Rightarrow dt = \frac{ds}{V}$$

הזמן הדרוש. - $t_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A, y_B}^{x_B, y_B} \frac{ds}{V}$

$$= \int \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{V}\,dx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = mgy}$$
$$\Rightarrow V = \sqrt{2gy}$$

ולכן

$$t_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

עבור איזה $y(x)$ $t_{AB}$ מינימלי

$$f \leftrightarrow \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}$$
$$x \leftrightarrow y$$
$$t \leftrightarrow x$$

ונתחיל בהצבה ב- E-L.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^{3/2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}}\right) = \frac{y''}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} + y'\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(y(1+y'^2))^{3/2}}\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(y(1+y'^2)\right)\right]\right)$$

עושים הרבה אלגברה

$$\boxed{y'' = -\frac{1+(y')^2}{2y}}$$

באופן כללי כשאני רוצה למצוא את האקסטרמום

$$I = \int_{t_A}^{t_B} f(x, \dot{x}, t)\,dt \longrightarrow$$

אצי:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

נפתור את המש״ה

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{2y}$$

$$2yy'' + 1 + y'^2 = 0 \quad / \cdot y'$$

$$2yy'y'' + (y')^3 + y' = 0$$

$$\left[y(1+y'^2)\right]' = y'^3 + y' + 2yy'y''$$

$$y(1+y'^2) = c$$

$$y'^2 = c/y - 1$$

$$y' = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \tan\varphi \Longrightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{y}{c-y}} \Rightarrow y = c\sin^2\varphi$$

φ פרמטר

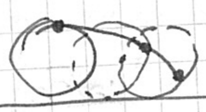
$$\frac{dy}{d\varphi} = 2c\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{\frac{y}{c-y}} \cdot 2c\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = c(1-\cos 2\varphi)$$

$$x = \int c(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

ציקלואידה $= \left\{ x = \frac{c}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi),\ y = \frac{c}{2}(1-\cos 2\varphi) \right]$



$$\text{Action} = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$$

Action $\leftrightarrow$ פעולה

עקרון המילטון $\leftrightarrow$ עקרון הפעולה המינימלית.

<u>Hamilton minimal action</u>

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L(q_1, q_2, \ldots ; \dot q_1, \dot q_2, \ldots \mid t)\,dt \qquad \{q_i\}_{i=1}^{n} \rightarrow \text{קואורדינטות בלתי תלויות.}$$

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt$$

אז אני מקבל את משוואות E-L:

$$\forall_i \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$