אינפי 4 : פתרון תרגיל 3

1. בעזרת משפט גרין חשבו את האינטגרל

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

כאשר Γ מכוונת נגד כיוון השעון במקרים הבאים:

א. $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$ ו־

$$\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}.$$

ב. $P = x(x+y)^2 + e^{-x^3}, Q = e^{-(x-y)^3}$ ו־

$$\Gamma = \{(x,y) : |x| + |y| = 2\}.$$

ג. $P = -y + \cos x, Q = x$ ו־

$$\Gamma = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 + 2xy = 1\}.$$

<u>פתרון</u>: א. כדי להשתמש במשפט גרין נשלים את Γ לחצי המעגל

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{(t,0), t \in [-1,1]\}$$

ונשים לב ש־Γ' המוגדרת כך מכוונת נגד כיוון השעון. ממשפט גרין נקבל

$$\int_\Gamma x^2(y+1)dx - xy^2dy$$

$$= \int_{\Gamma'} x^2(y+1)dx - xy^2dy - \int_\gamma x^2(y+1)dx - xy^2dy$$

$$= \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2(y+1)\right)\right) dxdy - \int_\gamma x^2(y+1)dx - xy^2dy$$

כאשר D הוא חצי העיגול $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ו־

$$\gamma(t) = (t,0), t \in [-1,1].$$

לכן נקבל ש־

$$\int_\Gamma x^2(y+1)dx - xy^2dy = -\int_D (x^2+y^2)dxdy - \int_{-1}^1 t^2dt$$

$$= (x = r\cos\theta, y = r\cos\theta, dxdy = rd\theta dr)$$

$$= -\int_0^1\int_0^\pi r^2\cdot rd\theta dr - \frac{t^3}{3}\bigg|_{t=-1}^{t=1} = -\pi\,\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=1} - \frac{2}{3}$$
$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

ב. ממשפט גרין נקבל

$$\int_\Gamma \left(x(x+y)^2 + e^{-x^3}\right)dx + e^{-(x-y)^3}dy$$
$$= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{-(x-y)^3} - \frac{\partial}{\partial y}\left(x(x+y)^2 + e^{-x^3}\right)\right)dxdy$$
$$= \int_D \left(-3(x-y)^2e^{-(x-y)^3} - 2x(x+y)\right)dxdy$$

כאשר D הוא הפנים של המעוין $\{(x,y) : |x|+|y| = 2\}$. כעת נבצע את החלפת המשתנים

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, v = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}.$$

כיוון שהחלפת משתנים זו היא אורתוגונלית נובע שהיעקוביאן שלה שווה ל־1, כלומר $dudv = dxdy$. כמו כן, כיוון שמישור ה־UV הוא סיבוב בזווית של $-\frac{\pi}{4}$ של מישור ה־XY נובע שתחום האינטגרציה הוא סיבוב בזווית של $-\frac{\pi}{4}$ של המעוין D, כלומר תחום האינטגרציה החדש הוא ריבוע עם מרכז בראשית ועם צלע באורך $2\sqrt{2}$. לכן

$$\int_\Gamma \left(x(x+y)^2 + e^{-x^3}\right)dx + e^{-(x-y)^3}dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-6v^2e^{2\sqrt{2}v^3} - 2\cdot\frac{u-v}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}u\right)dudv$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-6v^2 e^{2\sqrt{2}v^3} - 2u(u-v)\right) dudv$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-6v^2 e^{2\sqrt{2}v^3} - 2u^2\right) dudv + 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} uvdudv$$

כעת נשים לב שהאינטגרל השני מתאפס כי v (או u) היא פונקציה אי זוגית והאינטגרל מחושב על קטע סימטרי. כמו כן האינטגרל הראשון הוא סכום של פונקציה של v בלבד ופונקציה של u בלבד ולכן אפשר לחשב כל אינטגרל כפונקציה של משתנה אחד בנפרד להכפיל ב־$2\sqrt{2}$ (אורך הקטע $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$). לכן האינטגרל שווה ל־

$$-12\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} v^2 e^{2\sqrt{2}v^3} dv - 4\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} u^2 du$$

$$= -12\sqrt{2}\, \frac{e^{2\sqrt{2}v^3}}{6\sqrt{2}}\Bigg|_{v=-\sqrt{2}}^{v=\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}\, \frac{u^3}{3}\Bigg|_{u=-\sqrt{2}}^{u=\sqrt{2}}$$

$$= -2\left(e^8 - e^{-8}\right) - \frac{32}{3}.$$

ג. ממשפט גרין נקבל

$$\int_\Gamma (-y + \cos x)\, dx + xdy$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y + \cos x)\right) dxdy = 2\int_D dxdy$$

כאשר D הוא הפנים של האליפסה Γ. לכן האינטגרל שווה לפעמיים שטח האליפסה, לכן נשאר למצוא את הצירים של אליפסה זו. לשם כך נשתמש בהחלפת משתנים אורתוגונלית

$$x = (\cos\theta)u + (\sin\theta)v, y = -(\sin\theta)u + (\cos\theta)v.$$

לכן

$$x^2 + 3y^2 + 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow ((\cos\theta)u + (\sin\theta)v)^2 + 3(-(\sin\theta)u + (\cos\theta)v)^2$$

$$+2((\cos\theta)u+(\sin\theta)v)(-(\sin\theta)u+(\cos\theta)v)=1$$

$$\Leftrightarrow(\cos^2\theta+3\sin^2\theta-2\cos\theta\sin\theta)u^2+(\sin^2\theta+3\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)v^2$$

$$+(-4\cos\theta\sin\theta+2\cos^2\theta-2\sin^2\theta)uv=1$$

$$\Leftrightarrow(2-\cos(2\theta)-\sin(2\theta))u^2+(2+\cos(2\theta)+\sin(2\theta))v^2$$

$$+(-2\sin(2\theta)+2\cos(2\theta))uv=1$$

נשים לב שאם נציב $\theta=\frac{\pi}{8}$ אז ניפטר מהגורם uv. לכן עבור $\theta=\frac{\pi}{8}$ נקבל

$$(2-\sqrt{2})u^2+(2+\sqrt{2})v^2=1$$

לכן קיבלנו אליפסה עם צירים $a=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. כיוון ששטח אליפסה עם צירים a ו־b הוא $\pi\cdot a\cdot b$ וכיוון שהאינטגרל שאנו רוצים לחשב שווה לפעמיים שטח האליפסה נקבל ש־

$$\int_\Gamma(-y+\cos x)\,dx+xdy=\frac{2\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\pi.$$

2. בעזרת משפט גרין חשבו את השטח של

א. הציקלואידה $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}\leq(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$, $(a>b)$.

ב. הלמניסקטה $(x^2+y^2)^2\leq a^2(x^2-y^2)$.

<u>פתרון</u>: א. נשתמש בנוסחת השטח

$$\texttt{Vol}(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}-ydx+xdy$$

ובפרמטריזציה

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta,y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta$$

כאשר $\theta\in[0,2\pi]$ ונקבל:

$$\texttt{Vol}(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta\left(\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta\right)'\right.$$

$$+\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\theta\left(\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\theta\right)'\Bigg] d\theta$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\int_0^{2\pi}\left(-\sin^3\theta(3\cos^2\theta(-\sin\theta))+\cos^3\theta(3\sin^2\theta\cos\theta)\right)d\theta$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2}{2ab}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin^4\theta+\cos^4\theta\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2}{2ab}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{3(a^2-b^2)^2}{8ab}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)d\theta$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2}{16ab}\int_0^{2\pi}(1-\cos(4\theta))d\theta$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)^2}{16ab}\left(\theta-\frac{\sin(4\theta)}{4}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=\frac{3\pi(a^2-b^2)^2}{8ab}.$$

ב. כדי למצוא פרמטריזציה למניסקטה נסמן $x=\rho(\theta)\cos\theta, y=\rho(\theta)\sin\theta$ ונציב זאת במשוואה שמגדירה את עקומה זו

$$(x^2+y^2)^2\le a^2(x^2-y^2)$$

$$\Leftrightarrow\left(\rho^2(\theta)\cos^2\theta+\rho^2(\theta)\sin^2\theta\right)^2\le a^2(\rho^2(\theta)\cos^2\theta-\rho^2(\theta)\sin^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow\rho^4(\theta)\le a^2\rho^2(\theta)\cos(2\theta)\Leftrightarrow\rho(\theta)=a\sqrt{\cos(2\theta)}.$$

כדי ש־$\sqrt{\cos(2\theta)}$ יהיה מוגדר נדרוש ש־$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ וכך נקבל את ההצגה הפרמטרית של הלמניסקטה ברביע הראשון. כיוון שעקומה זו סימטרית ביחס לציר ה־x וציר ה־y מנוסחת האורך נקבל

$$\text{Vol}(D)=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Bigg[-a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\left(a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta\right)'$$

$$+a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta\left(a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\right)'\Bigg]d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Bigg[-\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\left(-\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\cos\theta-\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta\right)$$

$$+\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta\left(-\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\sin\theta+\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta\right)\Bigg]\,d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\sin(2\theta)\sin\theta\cos\theta+\cos(2\theta)\sin^2\theta$$

$$-\sin(2\theta)\cos\theta\sin\theta+\cos(2\theta)\cos^2\theta\Big)\,d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=4a^2\left.\frac{\sin(2\theta)}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}=2a^2.$$

3. א. עבור אלו ערכים של הפרמטר a קבוצת הפתרונות של המערכת

$$(*)\begin{cases}3x_1+x_2^3+2x_3+x_4^2=a,\\ 3x_1+3x_2+2x_3-4x_4=1\end{cases}$$

היא משטח ממימד 2 ב־$\mathbb{R}^4$?

ב. נניח $a=8$. מצאו את המישור המשיק למשטח שמוגדר ע"י מערכת הפתרונות $(*)$ בנקודה $(0,-1,4,1)$.

פתרון: נסמן ב־M_a את המשטח המתקבל ממערכת המשוואות $(*)$ וב־$D(x)$ את הדיפרנציאל של המערכת $(*)$ בנקודה x. קל לבדוק שדיפרנציאל זה נתון לפי

$$D(x)=\begin{pmatrix}3 & 3x_2^2 & 2 & 2x_4\\ 3 & 3 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

הדרגה של D לא מקסימלית במקרה שוקטורי הנגזרות פרופורציונאלים, כיוון ששני וקטורים אלו מתלכדים ברכיב הראשון (ששונה מאפס) נובע שמקרה זה יכול להתקיים רק כאשר שני וקטורים אלו מתלכדים, כלומר כאשר

$$3x_2^2=3,2x_4=-4\Rightarrow x_2=\pm1,x_4=-2.$$

כעת נבדוק עבור אילו ערכים של הפרמטר a קיימות נקודות $x\in\mathbb{R}^4$ הנמצאות על המשטח M_a עבורן הדרגה של D איננה מקסימלית. כלומר נבדוק עבור אילו ערכים של הפרמטר a קיימות נקודות $x\in\mathbb{R}^4$ המקיימות את מערכת המשוואות $(*)$ וכך ש־$x_2=\pm1,x_4=-2$. נבדיל בין שני מקרים

I. אם $x_2=1,x_4=-2$ אז המערכת $(*)$ תתקיים כאשר

$$3x_1 + 1^3 + 2x_3 + (-2)^2 = a,$$
$$3x_1 + 3 \cdot 1 + 2x_3 - 4 \cdot (-2) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$3x_1 + 2x_3 = a - 5,$$
$$3x_1 + 2x_3 = -10$$

לכן $a = -5$.

II. אם $x_2 = -1, x_4 = -2$ אז המערכת $(*)$ תתקיים כאשר

$$3x_1 + (-1)^3 + 2x_3 + (-2)^2 = a,$$
$$3x_1 + 3 \cdot (-1) + 2x_3 - 4 \cdot (-2) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$3x_1 + 2x_3 = a - 3,$$
$$3x_1 + 2x_3 = -4$$

לכן $a = -1$.

לכן קיבלנו ש־M_a מהווה משטח כאשר $a \neq -5, -1$.

ב. עבור $a = 8$ נקבל את המערכת

$$3x_1 + x_2^3 + 2x_3 + x_4^2 = 8$$
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1.$$

נזכור שהמישור המשיק ל־M_a בנקודה x מוגדר כ־

$$T_x(M_a) = \{x + y \in \mathbb{R}^4 : D(x)y\} = 0.$$

כיוון ש־

$$D(0, -1, 4, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

נקבל שהמישור המשיק בנקודה $(0, -1, 4, 1)$ הוא קבוצת הנקודות $(y_1, y_2 - 1, y_3 + 4, y_4 + 1)$ המקיימות

$$3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0,$$

$$3y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 4y_4 = 0.$$

אם נסמן

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4) = (y_1, y_2 - 1, y_3 + 4, y_4 + 1)$$

נקבל שהמישור המשיק הוא קבוצת הנקודות $z \in \mathbb{R}^4$ המקיימות

$$3z_1 + 3(z_2 + 1) + 2(z_3 - 4) + 2(z_4 - 1) = 0,$$

$$3z_1 + 3(z_2 + 1) + 2(z_3 - 4) - 4(z_4 - 1) = 0,$$

או

$$3z_1 + 3z_2 + 2z_3 + 2z_4 = 7,$$
$$3z_1 + 3z_2 + 2z_3 - 4z_4 = 1.$$

4. א. עבור אלו ערכים של הפרמטר a קבוצת הפתרונות של המערכת

$$(*) \begin{cases} 2x^2 + y^3 + z = 1, \\ x + 3y + z = a \end{cases}$$

היא משטח ממימד 1 ב־$\mathbb{R}^3$?

ב. נניח $a = 2$. מצאו את הישר המשיק למשטח שמוגדר ע"י מערכת הפתרונות $(*)$ בנקודה $(1, 1, -2)$.

פתרון: כמו בפתרון השאלה הקודמת נסמן ב־M_a את המשטח המוגדר לפי מערכת המשוואות $(*)$ וב־$D(x, y, z)$ את הדיפרנציאל של מערכת זו. קל לבדוק ש־

$$D(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x & 3y^2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

הדרגה של D איננה מקסימלית כאשר וקטורי הנגזרות פרופורציונאלים. כיוון ששני וקטורים אלו מתלכדים ברכיב השלישי (ששונה מאפס) נובע שמקרה זה יכול להתקיים רק כאשר שני וקטורים אלו מתלכדים, כלומר

$$4x = 1, 3y^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, y = \pm 1.$$

כפי שעשינו בפתרון השאלה הקודמת נבדוק עבור אילו ערכי a הנקודה $p = \left(\frac{1}{4}, \pm 1, z\right)$ מקיימת את מערכת המשוואות $(*)$. נבדיל בין שני מקרים

I. אם $x = \frac{1}{4}, y = 1$ אז המערכת $(*)$ תתקיים כאשר

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^3 + z = 1,$$
$$\frac{1}{4} + 3 \cdot 1 + z = a$$
$$\Downarrow$$
$$z = -\frac{1}{8},$$
$$z = a - 3\frac{1}{4}$$

לכן $a = 3\frac{1}{8}$.

II. אם $x = \frac{1}{4}, y = -1$ אז המערכת $(*)$ תתקיים כאשר

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-1)^3 + z = 1,$$
$$\frac{1}{4} + 3 \cdot (-1) + z = a$$
$$\Downarrow$$
$$z = 1\frac{7}{8},$$
$$z = a + 2\frac{3}{4}$$

לכן $a = -\frac{7}{8}$.

לכן נקבל ש־M_a הוא משטח כאשר $a \neq 3\frac{1}{8}, -\frac{7}{8}$.

ב. עבור $a = 2$ נקבל את המערכת

$$2x^2 + y^3 + z = 1$$
$$x + 3y + z = 2.$$

המישור המשיק ל־M_a בנקודה x מוגדר כ־

$$T_x(M_a) = \{x + y \in \mathbb{R}^3 : D(x)y\} = 0.$$

כיוון ש־

$$D(1,1,-2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

נקבל שהמישור המשיק בנקודה $(1,1,-2)$ הוא קבוצת הנקודות (y_1+1, y_2+1, y_3-2) המקיימות

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 0,$$

$$y_1 + 3y_2 + y_3 = 0.$$

אם נסמן

$$z = (z_1, z_2, z_3) = (y_1+1, y_2+1, y_3-2)$$

נקבל שהמישור המשיק הוא קבוצת הנקודות $z \in \mathbb{R}^3$ המקיימות

$$4(z_1-1) + 3(z_2-1) + z_3 + 2 = 0,$$

$$z_1 - 1 + 3(z_2-1) + z_3 + 2 = 0,$$

או

$$4z_1 + 3z_2 + z_3 = 5,$$

$$z_1 + 3z_2 + z_3 = 2.$$