תרגול אנליזה מודרנית 9

הגדרה: יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות על ממח (X,S). נאמר כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ אם מתקיים שלכל $A \subseteq S$ $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$ נסמן זאת $\nu \ll \mu$.

דוגמא: המידה $\delta_0(dx)$ (הדלתא של דירק) איננה רציפה ביחס למידת לבג שכן $m(\{0\})=0$ אבל $\delta_0(dx)=1$.

דוגמא: תהי m מידת לבג על הקטע $[0,1]$ ותהי f פונקציה אי שלילית על הקטע $[0,1]$. אזי לכל קבוצה מדידה נוכל להגדיר מידה חדשה $dF(A)=\int_A fdm$. קל לראות כי אם $m(A)=0$ אז $dF(A)=0$. מכאן ש $dF \ll m$.

דוגמא: נסתכל על המידה $M=\sum_{k\in\mathbb{N}}\delta_k(dx)$. עבור כל סדרה אי שלילית $\{a_n\}$ נקבל כי $N=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k\delta_k(dx)$ הינה מידה רציפה בהחלט ביחס ל M.

בהרצאה נוכיח שאם $f \geq 0$ מדידה בממ"ח (X,S,μ) אזי $\nu(E):=\int_E fd\mu$ מגדירה מידה חדשה, ובנוסף $\mu(E)=0 \Rightarrow \nu(E)=0$ ולכן $\nu << \mu$. נסמן $f=\frac{d\nu}{d\mu}$, f נקראת נגזרת רדון-ניקודים של ν ביחס ל- μ . משפט רדון-ניקודים אומר שעבור מידות σ סופיות μ,ν כך שמתקיים $\nu << \mu$ אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים $f=\frac{d\nu}{d\mu}$, פוקנציה מדידה ואי שלילית כב"מ μ . בדוגמא השנייה הפונקציה f הינה נגזרת רדון ניקודים ואילו בדוגמא השלישית הפונקציה $f(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k 1_{\{k\}}(x)$.

תרגיל:

יהי (X,S) מ"מ ותהיינה μ,ν,λ מידות σ -סופיות עליו, המקיימות $\mu << \lambda, \nu << \lambda$.אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$ ומתקיים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}$.

פתרון: ניתן ליישם את משפט רדון-ניקודים על היחסים $\mu << \lambda, \nu << \lambda$ ולקבל שקיימות $f = \frac{d\mu}{d\lambda}, g = \frac{d\nu}{d\lambda} \geq 0$ ומדידות כך ש- $\mu(E) = \int_E f d\lambda, \nu(E) = \int_E g d\lambda$ לכל E מדידה. מכאן:

$$(\mu+\nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda = \int_E (f+g) d\lambda = \int_E \left(\frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda}\right) d\lambda$$

כלומר קיימת $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$ ומתקיים $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda}$.

תרגיל: נניח כי X הינה קבוצה וכי $S_1 \subset S_2$ הינן סיגמא אלגברות על X. יהיו μ ו ν שתי מידות על (X, S_1) ונניח כי $\nu \ll \mu$. יהי $\bar{\mu}$ הצמצום של μ על (X, S_2) ו $\bar{\nu}$ הצמצום של ν על (X, S_2). מצאו דוגמא שבה $\frac{d\mu}{d\nu} \neq \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}}$.

פתרון: ניקח את $X = [0,1]^2$, $S_1 = \sigma\left([0,1]^2\right)$ ו $S_2 = E \times \sigma([0,1])$, כאשר E הינה הסיגמא אלגברה הטריוויאלית על $[0,1]$. נגדיר $\mu = L\left([0,1]^2\right)$ ו $\nu(A) = \int_A g(y) f(x) dxdy$ עבור קבוצה מדידה $A \subset [0,1]^2$ כאשר g, f הינן פונקציות אי שליליות. קל לראות כי $\frac{d\mu}{d\nu} = g(y) f(x)$. על מנת למצוא את $\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}}$ קודם כל נבין מהי המידה $\bar{\mu}$. $\bar{\mu}$ שווה $1 \cdot m(B)$ על המלבנים מהצורה $[0,1] \times B$ כאשר B הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$, ו 0 על מלבנים מהצורה $\varnothing \times B$. לכן אנו צריכים למצוא פונקציה $h(x,y)$ כך ש $\int_C h(x,y) \bar{\mu} = \int_C g(y) f(x) dxdy = \bar{\nu}(C)$ עבור כל מלבן C ב S_2. ננסה את הפונקציה $h(x,y) = Q \cdot 1_{\{x \in [0,1]\}} g(y)$ כאשר $Q = \int_0^1 f(x) dx$. אכן, עבור C מהצורה $\varnothing \times B$ ברור כי מתקיים $\int_C h(x,y) \bar{\mu} = 0 = \int_B \int_\varnothing g(y) f(x) dxdy = \bar{\nu}(C)$. כמו כן, עבור C מהצורה $[0,1] \times B$ נקבל

$$\bar{\nu}(C) = \int_B \int_{[0,1]} g(y) f(x) dxdy = Q \int_B g(y) dy$$

עכשיו נניח ו $\varphi_n = \sum_{i=1}^n c_n 1_{E_n}$ הינה סדרה של פונקציות פשוטות המתכנסות ל g. אזי בהכרח $h_n(x,y) = Q \cdot 1_{\{x \in [0,1]\}} \varphi_n(y)$ הינה סדרה של פונקציות פשוטות אשר מתכנסות ל h. מכאן שעבור C מהצורה $[0,1] \times B$ נקבל

$$\int_C h(x,y) d\bar{\mu} = \int_C h_n(x,y) d\bar{\mu} = \sum_{i=1}^n Qm(E_n \cap B) c_n = Q \int_B g(y) dy$$

מכאן כי בסה"כ נקבל כי

$$.\overline{\nu}(C)=\int_C h(x,y)\overline{\mu}$$

עבור כל C מהצורה המבוקשת, ולכן $\overline{\nu}(C)=\int_C h(x,y)\overline{\mu}$ עבור כל $C\in S_1$ ומכאן כי

$\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}}=h(x,y)$. קל לראות כי ניתן למצוא דוגמאות עבורן $\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{\nu}}\neq\frac{d\mu}{d\nu}$.

מסקנה: הנגזרת $\frac{d\mu}{d\nu}$ איננה תלוייה רק במידות μ ו ν אלא גם בסיגמא אלגברה עליה הן מוגדרות.

1. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ. תהי $\rho=\mu+\nu$. שימו לב כי $\mu\ll\rho$ וגם כי $\nu\ll\rho$. הוכיחו כי אם $f=\frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g=\frac{d\nu}{d\rho}$ אזי

א. $f>0$ כב"מ μ .

ב. $f+g=1$ כב"מ ρ .

ג. $d\nu=\frac{g}{f}d\mu$.

פתרון:

א. מהנתון כי $\nu\ll\mu$ נובע כי $\rho\ll\mu$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A)=\int_A fd\rho$$

נניח בשלילה ש א' אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E)>0$ וגם $f=0$ על E . אבל אז $\mu(E)=\int_A fd\rho=0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E)>0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A)=\int_A fd\rho$ וגם כי $\nu(A)=\int_A gd\rho$ לכל A מדידה. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\begin{aligned}&\int 1_A(f+g)d\rho=\int 1_A fd\rho+\int 1_A gd\rho\\&=\mu(A)+\nu(A)=\rho(A)=\int 1_A d\rho\end{aligned}$$

לכן נובע כי $f+g=1$ כב"מ ρ .

ג. קודם כל נתחיל בהערה, ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי אם $\int zd\nu<\infty$ וגם $\int zd\mu<\infty$ אזי $\int zd\mu=\int zfd\rho$ וגם $\int zd\nu=\int zgd\rho$. לכן נסמן לפעמים $d\nu=gd\rho$. עפ"י

משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A)=\int 1_A hd\mu$ לכל A מדידה. מצד שני

$$\int 1_A gd\rho=\nu(A)=\int 1_A hd\mu= \\ \int 1_A hd\mu=\int 1_A hfd\rho$$

ומכאן ש כב"מ ρ $g=fh \Leftarrow h=\frac{g}{f}$.

תרגיל: יהיו X ו Y משתנים אקראיים ממשיים בעלי תוחלת μ_x ו μ_y בהתאמה. הראו כי $\left|\operatorname{cov}(X,Y)\right|\le\sigma_X\sigma_Y$.

פתרון: נראה כי $E\left(\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)$ הינה מכפלה פנימית.

i.
$$E\left(\left(X+Z-\mu_{X+Z}\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)=E\left(\left(X+Z-\mu_X-\mu_Z\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right) \\ =E\left(\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)+E\left(\left(Z-\mu_Z\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)$$

ii. ברור כי
$$E\left(\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)=E\left(\left(Y-\mu_Y\right)\left(X-\mu_X\right)\right)$$

iii. $E\left(\left(X-\mu_X\right)^2\right)\ge 0$ וגם אם $E\left(\left(X-\mu_X\right)^2\right)=0$ אזי עפ"י שיוויון מרקוב נובע כי $P\left(\left|X-\mu_X\right|>\lambda\right)\le\frac{E\left(\left|X-\mu_X\right|^2\right)}{\lambda}=0$ לכל $\lambda>0$ ולכן $\left(X-\mu_X\right)=0$ כב"מ.

מכאן שמתקיימות התכונות של מכפלה פנימית ולכן עפ"י א"ש קושי שוורץ

$$E\left(\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right)\le\sqrt{E\left(\left(X-\mu_X\right)^2\right)}\sqrt{E\left(\left(Y-\mu_Y\right)^2\right)} \\ \Leftrightarrow\left|Cov(X,Y)\right|\le\sigma_X\sigma_Y$$
.