תורת הגרפים - הרצאה 4

20 בנובמבר 2011

משפט קיילי

מס' העצים המסומנים מסדר n שווה ל-n^{n-2}.

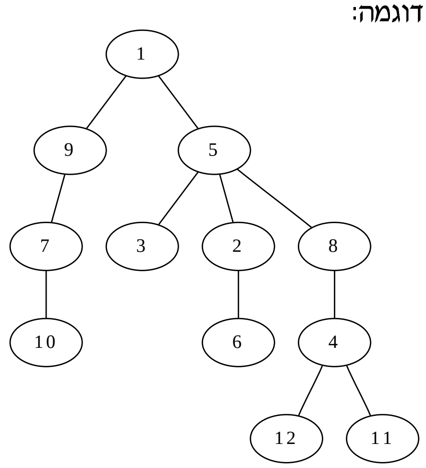
הוכחה שניה

עובדה 1

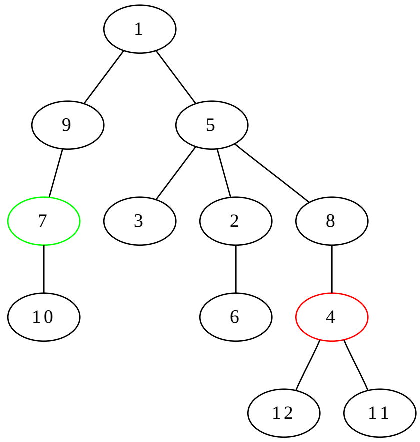
מס' הפונק' מ-$[n]$ ל-$[n]$ הוא n^n.

מסקנה 2

מס' הגרפים המכוונים ה-1^+-רגולריים מסדר n הוא n^n.
נגדיר: עץ מסומן מסדר n עם קדקד ראש וקדקד זנה בתור שלשה סדורה: (T, u, v), כאשר T הוא עץ מסומן מסדר n, u קדקד בגרף, v קדקד בגרף.
משפט קיילי שקול למשפט:
מס' העצים המסומנים מסדר n עם קדקדי ראש וזנב שווה למס' הגרפים המכוונים ה-1^+-רגולריים מסדר n.
נגדיר העתקה מעצים מסומנים מסדר n עם ראש וזנב לגרפים מכוונים 1^+-רגולריים.
דוגמה:



T עץ מסומן מסדר 12.
נסמן את קדקד הראש בירוק ואת הזנב באדום: (בחרנו 7 כראש ו-4 כזנב)



נכתוב את המסילה מהראש אל הזנב:

$$7, 9, 1, 5, 8, 4$$

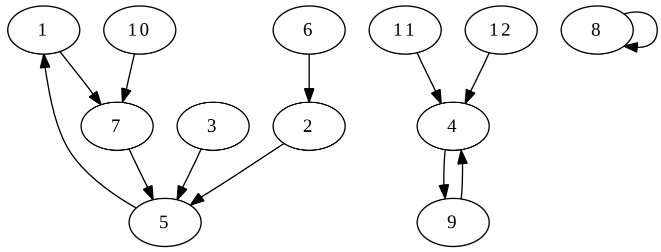
כעת נכתוב את הספרות האלה בסדר עולה, ומתחת נכתוב בסדר המסילה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

קיבלנו תמורה. נכתוב אותה במבנה מחזורי:

$$(1\ 7\ 5)\ (4\ 9)\ (8)$$

כעת ניצור ממעגלים אלה גרף מכוון ($1 \to 5 \to 7 \to 1$, $4 \to 9 \to 4$, $8 \to 8$), ונשרשר לכל קדקד את העץ המתאים לו בגרף T, כשהצלעות מכוונות כלפי המעגל:



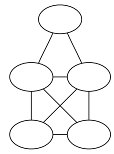
קיבלנו גרף 1^+-רגולרי מסדר 12. כדי להוכיח שההעתקה הזו חח"ע ועל מספיק להראות שהיא הפיכה.
אכן, בהינתן גרף 1^+-רגולרי, כל רכיב קשירות שלו מורכב ממעגל מכוון ועצים שמשתרשרים מקדקדיו ומכוונים כלפי המעגל.
תחילה, נשמיט את העצים ונישאר עם המעגלים. נרשום את המעגלים המכוונים כמכפלה של מחזורים זרים.
נכתוב את התמורה המתקבלת כאשר בשורה הראשונה האינדקסים בסדר עולה. הקדקד השמאלי בשורה התחתונה הוא קדקד הראש והימני הוא קדקד הזנב.
השורה התחתונה היא המסילה בין קדקד הראש לקדקד הזנב.
נשרשר לכל קדקד במסילה זו את העצים המשורשר אליו בגרף ה1^+-רגולרי הנתון, ונשכח את ההכוונה, ונקבל עץ מסומן מסדר 12 עם ראש וזנב.
זו ההעתקה ההפוכה, ולכן היא חח"ע ועל, מש"ל.

הגשרים של קניגסברג - אוילריאן והמילטוניאן

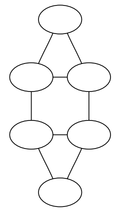
הגדרה

מסלול אוילר בגרף הוא מסלול (הילוך שבו אין צלע שמופיעה פעמיים) המכיל את כל צלעות הגרף.
מסלול אוילר סגור הוא מסלול אוילר שמתחיל ונגמר באותו קדקד.

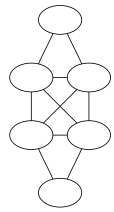
גרף הוא אוילריאן אם יש בו מסלול אוילר סגור.
גרף הוא סמי-אוילריאן אם יש בו מסלול אוילר.
דוגמה:



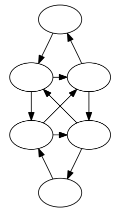
זהו סמי-אוילריאן.



אינו אוילריאן.



אוילריאן:



משפט אוילר

גרף קשיר פשוט וסופי הוא אוילריאן אמ"ם דרגות כל הקדקדים זוגיות.

הוכחה

נתחיל בלמה:

למה

יהי G קשיר וסופי. אם $\delta(G) \geq 2$ אז G מכיל מעגל.

הוכחת הלמה

אם G אינו מכיל מעגל, אזי הוא עץ סופי, ולכן או שסדרו 1 ואז $\delta(G) = 0$ או שהוא מכיל עלה ואז $\delta(G) = 1$.

המשך הוכחת המשפט

כיוון 1:
נניח G אוילריאן, צ"ל דרגות כל הקודקודים זוגיות.
יהי $v_0, v_1, ..., v_0$ מסלול אוילר סגור (נשים לב שהקדקדים בסדרה לאו דווקא שונים).
יהי $v \neq v_0$ קדקד בגרף. נניח v מופיע k פעמים במסלול.
לכל הופעה מתאימה צלע נכנסת וצלע יוצאת. אין צלע שחוזרת פעמיים, לכן $\deg(v) = 2k$.
עבור v_0, בהופעה הראשונה יש צלע יוצאת ובהופעה האחרונה צלע נכנסת, ובכל הופעה אחרת יש 2 צלעות, לכן $\deg(v_0)$ זוגית.
מש"ל כיוון 1.
כיוון 2:

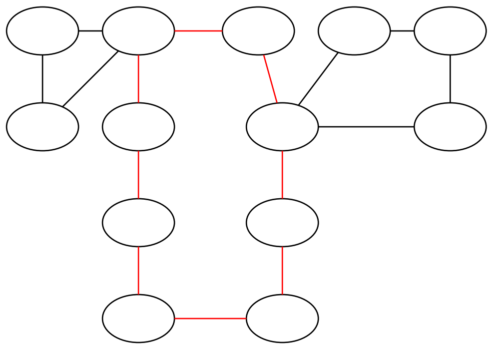
נניח G קשיר פשוט סופי בו דרגות כל הקדקדים זוגיות. צ"ל - יש בG מסלול אוילר סגור.
נוכיח באינדוקציה על מס' הצלעות בG.
אם מס' הצלעות הוא 0, כלומר הגרף הוא קדקד בודד v, אזי v מסלול אוילר סגור.
נניח נכונות עבור כל גרף פשוט סופי קשיר עם פחות מm צלעות.
יהי G גרף פשוט סופי קשיר עם m צלעות שבו לכל קדקד דרגה זוגית.
ניתן להניח $m > 0$.
הגרף G קשיר, לא ריק, לכן $\delta(G) \geq 1$.
אבל לפי ההנחה (לכל הקדקדים דרגה זוגית) לכן $\delta(G) \geq 2$.
לכן, לפי הלמה, יש בG מעגל (לא ריק). מכאן, יש בG מסלול סגור מאורך ≤ 3.
בגרף סופי, מס' המסלולים הסגורים הוא סופי. לכן, קיים מסלול סגור מאורך מקסימלי. נסמנו c.

טענת עזר

c מסלול אוילר סגור.

הוכחת טענת העזר

צ"ל c מכיל את כל הצלעות.
נסמן $G \backslash c$ הגרף המתקבל מG אחרי השמטת הצלעות בc. מ"ל $G \backslash c$ גרף ריק.
אם $G \backslash c$ לא ריק, אזי ב$G \backslash c$ יש רכיב קשירות לא ריק.
ציור:



נשים לב, לכל רכיב קשירות לא ריק ב$G \backslash c$ (c זה המסלול האדום) יש קדקד משותף עם c (אחרת G אינו קשיר בניגוד להנחה). יתר על כן, דרגות כל הקדקדים ב$G \backslash c$ זוגיות (כי $d_{G \backslash c}(v) = d_G(v) - d_c(v)$ וזה חיסור מספרים זוגיים).
כמו כן, c אינו ריק, לכן ב$G \backslash c$ לכל היותר יש $n - 3$ צלעות, לכן אפשר להחיל בו את הנחת האינדוקציה - בכל רכיב קשירות לא ריק של $G \backslash c$ יש מסלול אוילר סגור, ולמסלול זה יש קדקד משותף עם c. נשרשר מסלולים אלה לc ונקבל סתירה להנחה.
הסבר השרשור: כותבים את המסלול c כסדרה. לכל מסלול אוילר ברכיב קשירות של $G \backslash c$ נבחר קדקד משותף עם c, נקרא לו v, ואז נחליף בc את v בכל המסלול הנ"ל.

המילטוניאן

שאלה 1

האם בגרף נתון קיים הילוך שעובר על כל הצלעות ולא עובר על צלע פעמיים? מצא הילוך כזה.

שאלה 2

האם בגרף נתון קיים הילוך שעובר על כל הקדקדים ולא עובר על קדקד פעמיים? מצא הילוך כזה.

שאלה 1 קלה - תנאי הכרחי ומספיק להילוך אוילר סגור זה משפט אוילר. מציאת אלגוריתם - תרגיל.
תנאי הכרחי ומספיק לקיום הילוך אוילר - תרגיל.

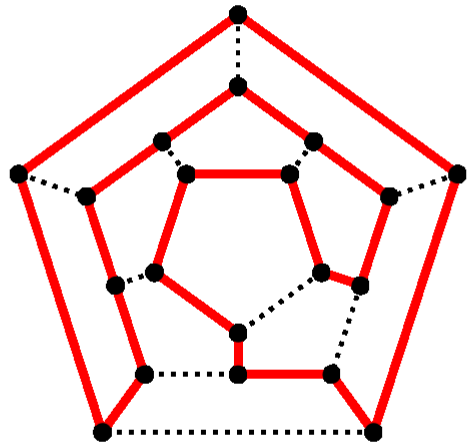
שאלה 2 היא קשה מאוד, בעיה פתוחה במתמטיקה.

הגדרה

מסילה המילטונית בגרף היא מסילה שעוברת על כל הקדקדים.
מעגל המילטוני הוא מסילה המילטונית סגורה.
המילטוניאן - גרף שיש בו מעגל המילטוני.

משפט

גרף הדודקהדר הוא המילטוניאן.
דודקהדר:



ד"א, ב1759 אוילר גילה מעגל המילטוני בגרף מסדר 64:

$$V=\{(i,\,j)\;\mid 1\leq i\leq 8,\,1\leq j\leq 8\}$$

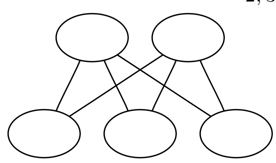
כאשר $((i,\,j)\,,\,(k,\,\ell))$ צלע אמ"ם יש הילוך פרש מ$(i,\,j)$ ל$(k,\,\ell)$.
אוילר הוכיח - יש הילוך פרש על כל משבצות לוח שחמט בלא לחזור על משבצת פעמיים ולסיים בקדקד המוצא.

משפט דיראק (1952)

גרף פשוט G מסדר n הוא המילטוניאן אם $\delta\left(G\right)\geq\frac{n}{2}$.

הגדרה

גרף $K_{m,\,n}$ הוא גרף מסדר $m+n$. קבוצת קדקדיו V ובו תת קבוצה $A\subseteq V$ מסדר m וקבוצת צלעות $(u,\,v)\in E\iff u\in A,\,v\notin A$.
דוגמה:
$K_{2,\,3}$:



תרגיל

מצא תנאי הכרחי ומספיק ל$K_{m,\,n}$ להכיל מעגל המילטוני\מסילה המילטונית.