פתרון תרגיל בית 10 תורת גלואה - תשע"ח

1. הוכיחו כי ניתן לבנות את הפוליגון הרגולרי עם n־צלעות אם ורק אם ניתן לבנות את $\cos(\frac{2\pi}{n})$.

פתרון: קודקודי הפוליגון הרגולרי הם בדיוק שורשי היחידה מסדר n. ולכן הוא ניתן לבנייה אס"ם ρ_n בר בניה.

כידוע $\rho_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ הוא בר בנייה אס"ם $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ הם ברי בנייה. בפרט, אם הפוליגון בר־בנייה אז $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ בר בנייה.

מצד שני, אם $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ בר בנייה אז $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ הוא בר בנייה (כי סכום\כפל\שורש של מספרים ברי בנייה הם ברי בנייה)־ וכך ρ_n והפוליגון ברי בנייה.

2. הוכיחו כי $2\cos(\frac{2\pi}{5})$ הוא שורש של הפולינום x^2+x-1. הסיקו כי ניתן לבנות מחומש משוכלל בעזרת סרגל ומחוגה.

הנחיות: הסבירו למה זה בעצם $\rho_5+\rho_5^4$ (חלק ממשי...). הסתכלו בהרחבה $\mathbb{Q}\left[\rho_5\right]$, וחשבו את הפולינום המינימלי.

פתרון: כידוע $\bar{\rho_5} = \rho_5^4$ הוא הצמוד של ρ_5, ולכן

$$\rho + \rho^4 = 2Re(\rho) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

.

$\mathbb{Q}[\rho] \ni \rho+\rho^4$ שהיא הרחבת גלואה, ולכן נדע את הפולינום המינימלי ע"י חישוב המסלול תחת חבורת גלואה $U_5 \cong \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}\left[\rho\right]/\mathbb{Q}\right)$:

$$\sigma_1(\rho+\rho^4) = \rho+\rho^4$$
$$\sigma_2(\rho+\rho^4) = \rho^2+\rho^3$$
$$\sigma_3(\rho+\rho^4) = \rho^3+\rho^2$$
$$\sigma_4(\rho+\rho^4) = \rho^4+\rho$$

קבלנו מסלול: $\{\rho+\rho^4, \rho^2+\rho^3\}$ (אלו איברים שונים בהכרח כי $\rho, \ldots, \rho^5$ הוא בסיס של השדה מעל $\mathbb{Q}$). ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$\left(x-\rho-\rho^4\right)\left(x-\rho^2-\rho^4\right) = x^2-(\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4)x+(\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4) = x^2+x-1$$

(שימו לב שהשתמשנו בעובדה שעבור שורש יחידה מסדר n: $1+\rho_n+\rho_n^2+\cdots+\rho_n^{n-1}=0$ לפי סכום סדרה הנדסית).
כעת, שדה הפיצול של הפולינום הוא הרחבה ריבועית, ולכן $\rho+\rho^4$ הוא בר בנייה.
מכאן נסיק ש $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$ הוא בר בנייה ולכן (לפי השאלה הקודמת) המחומש המשוכלל הרגולרי הוא בר־בנייה.

3. קבעו ונמקו האם המספרים הבאים הם ברי בנייה:

א. ρ_{15}.

ב. $\rho_{21}+\rho_{21}^4+\rho_{21}^{16}$.

.

פתרון:

א. שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}[\rho_{15}]$ וחבורת גלואה היא $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}[\rho_{15}]/\mathbb{Q}\right) \cong U_{15}$ שהיא מסדר $\varphi(15)=8$ חזקת 2 ולכן ρ_{15} הוא בר בנייה.

ב. נסמן $\alpha=\rho_{21}+\rho_{21}^4+\rho_{21}^{16}$. אזי $\alpha \in \mathbb{Q}[\rho_{21}]$. $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}[\rho_{21}]/\mathbb{Q}\right) = \left\{\sigma_k \,|\, (21,k)=1,\, \sigma_k(\rho_{21})=\rho_{21}^k\right\} \cong U_{21}$ הרחבת גלואה אבלית,

ולכן $^{\mathbb{Q}[\alpha]}/_{\mathbb{Q}}$ היא הרחבת גלואה (ושדה הפיצול של α). נחשב את $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\rho_{21}]/\mathbb{Q}[\alpha])$ ואז $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}\right) \cong U_{12}/\,\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\rho_{21}]/\mathbb{Q}[\alpha]$.

$$\sigma_1(\alpha) = \alpha$$
$$\sigma_4(\alpha) = \alpha$$
$$\sigma_{16}(\alpha) = \alpha$$

וכל השאר לא שומרים על α (אגב, יותר פשוט לראות את זה אם כותבים את זה כתמורות.) ולכן ||

4. הוכיחו כי אם a, b הם ברי בנייה, אזי $a+b$, ab ו־$\frac{a}{b}$ הם ברי בנייה.
טיפ: משפט תאלס.

פתרון: ראו בוויקיפדיה.