מועד א׳ חשבון אינפיניטסימלי 89-132, תשפ״א

מרצים: אלעד עטייא, ד״ר ארז שיינר.

מתרגלים: אמונה ליפסקר, עקיבה מלכה, אלעד עטייא, ניקול צאירי, אושרית שטוסל.

__הוראות:__

משך הבחינה: שעתיים.

כל חומר עזר אסור בשימוש, למעט מחשבון פשוט.

כל שאלה שווה 27 נקודות; כל שאלה מיטיבה שווה 2 נקודות.

בשאלות ה״רגילות״ **נמקו כל צעד**. בשאלות המיטיבות תשובה סופית תספיק.

__שאלה 1:__

הוכיחו כי לכל $1<x<e^2$ מתקיים: $\frac{4\ln x}{\sqrt{x}}<\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}-1}$; רמז: משפט הערך הממוצע של קושי.

__שאלה 2:__

תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בכל הממשיים, ומקיימות:
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, \lim\limits_{x\to b} g(x)=c$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

טענה א׳: $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$.

טענה ב׳: נתבונן בפונקציה:

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq b \\ c & x=b \end{cases}$$

אזי, מתקיים: $\lim\limits_{x\to a} h(f(x))=c$

שאלה 3:

סעיף א': (13 נק') הוכיחו או הפריכו את ההכללה הבאה של מבחן העיבוי – תהי b_n סדרה מונוטונית עולה של מספרים חיוביים כך שהחל משלב מסוים מתקיים: $2^n \le b_n$ לכל n, ותהי a_n מונוטונית יורדת. אזי, הטור $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum b_n \cdot a_{b_n}$ מתכנס.

סעיף ב': (12 נק') קבעו האם הטור $\sum \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס.

שאלה 4:

תהי a_n סדרה חיובית, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

טענה א': (12 נק') אם $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$ לכל n, אזי הסדרה a_n מתכנסת.

טענה ב': (13 נק') אם $a_{n+1}^2 - a_n^2 \to 0$, וגם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ אזי הסדרה a_n מתכנסת.

שאלות מיטיבות:

שאלה 5: חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n\cos\frac{1}{n}}$

שאלה 6: גזרו את הפונקציה: $x^{e^{e^x}}$.

שאלה 7: חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{(n+4)(n+5)} - \frac{2^{-2n}\cdot 3^n}{5}\right)$.

שאלה 8: מצאו את החסם העליון של הקבוצה: $A=\left\{\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$.