אינפי 4 - הרצאה 3

8 באוגוסט 2011

תכולת מקבילון - תיקון והשלמה

הגדרה

נניח שנתונים הוקטורים $v_1, .., v_k \in \mathbb{R}^n$ כאשר $n \geq k$.
אם $n > k$ תכולת המקבילון שהם פורשים ב-$\mathbb{R}^n$ היא 0, אבל נגדיר נפח (תכולה) של המקבילון הנ"ל במרחב $\mathbb{R}^k$ כך:
תחילה נמצא בעזרת תהליך גרם-שמידט בסיס אורתונורמלי $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים:

$$\mathrm{span}\left\{u_1, ..., u_k\right\} = \mathrm{span}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$$

כעת נגדיר העתקה לינארית:

$$\begin{aligned} T:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^k \\ \forall i \in \{1..k\}\ T\left(u_i\right) &= e_i \end{aligned}$$

כאשר $\left\{e_i\right\}_{i=1}^k$ בסיס סטנדרטי ב-$\mathbb{R}^k$.
ועתה נגדיר:

$$\mathrm{Vol}_k\left(P\left(v_1, ..., v_k\right)\right) = \mathrm{Vol}\left(P\left(T\left(v_1\right), ..., T\left(v_k\right)\right)\right)$$

מצד שני, אפשר לקצר תהליך זה ע"י המשפט הבא:
אם A היא המטריצה שעמודותיה הן $v_1, .., v_k$ אז:

$$\mathrm{Vol}_k\left(P\left(v_1, .., v_k\right)\right) = \sqrt{\det\left(A^t A\right)}$$

דוגמה

יהיו הוקטורים:

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 1) \\ v_2 &= (3, 4, 0) \end{aligned}$$

נמצא את השטח הדו מימדי של המקבילית הנפרשת ע"י v_1, v_2.
תחילה, לפי ההגדרה: תת המרחב של $\mathbb{R}^3$ שבתוכו המקבילית הוא $V = \mathrm{span}\left\{v_1, v_2\right\}$.
נשים לב כי $v_1 \cdot v_2 = 0$, הם אורתוגונליים, נותר רק לנרמל.
v_1 נורמלי, ננרמל את v_2 ע"י חלוקה ב-5, נקבל:

$$\begin{aligned} u_1 &= (0, 0, 1) \\ u_2 &= \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \end{aligned}$$

נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} T:\ V &\to \mathbb{R}^2 \\ T(0,0,1) &= (1,0) \\ T\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right) &= (0,1) \end{aligned}$$

כעת נחשב:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(0,0,1) = (1,0) \\ T(v_2) &= T(3,4,0) = (0,5) \end{aligned}$$

לכן השטח הוא:

$$\mathrm{Vol}\left(P\left((1,0),\,(0,5)\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

דרך שניה - לפי המשפט:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

ולכן השטח הוא:

$$\mathrm{Vol}_2\left(P\left(v_1,\,v_2\right)\right) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}} = 5$$

הוכחת המשפט על נפח מקבילון k-מימדי ב$\mathbb{R}^n$ $(n>k)$

יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב k מימדי הנפרש ע"י $v_1,\,..,\,v_k$.
יהי $u_1,\,..,\,u_n$ אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ הפורש את V.
נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \varphi:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \varphi(u_i) &= e_i \end{aligned}$$

נגדיר:

$$\varphi(v_i) = v_i,\ 1 \le i \le k$$

ואז $\varphi(P)$ הוא המקבילון הנפרש ע"י b_i ב$\mathbb{R}^k$.
ע"פ ההגדרה, אם נגדיר שB זו המטריצה שb_i הן עמודותיה.

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_k(P) &= V(\varphi(P)) \\ &= \sqrt{\det\left(B^tB\right)} = \sqrt{\det\left(b_i^t \cdot b_j\right)} \\ &= \sqrt{\det\left(v_i^t \cdot v_j\right)} = \sqrt{\det\left(A^tA\right)} \end{aligned}$$

המעבר בין $b_i^t \cdot b_j$ ל$v_i^t \cdot v_j$ נכון בגלל שφ אורתוגונלית ולכן מתקיים $\det(A) = \det(\varphi(A))$.

מסילות בעלות אורך ב-$\mathbb{R}^n$ - הגדרה

מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ היא פונק' רציפה $\gamma:\ [a,\, b]\rightarrow\mathbb{R}^n$.
התמונה של המסילה γ נקראת קו.
נעסוק בעיקר במסילות חלקות (גזירות ברציפות בקטע $[a,\, b]$ כך ש-$\gamma^{'}(t)\neq 0$ לכל $t\in[a,\, b]$).
כדי להגדיר אורך של מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ נקרב את אורכה על ידי קווים פוליגונליים לאורך המסילה.
נתבונן בקטע $[a,\, b]$. ניקח חלוקה של הקטע:

$$p=\left(t^0,\, ...,\, t^k\right)$$

נסמן ב-$\gamma\left(p\right)$ את הקו הפוליגונלי שקודקודיו הם

$$\gamma\left(a\right)=\gamma\left(t^0\right),\, ...,\, \gamma\left(t^k\right)=\gamma\left(b\right)$$

אורכו של $\gamma\left(p\right)$ יהיה:

$$L\left(\gamma\left(p\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}\left\Vert \gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right\Vert$$

הגדרה - מסילה בעלת אורך

תהי γ מסילה $\gamma:\ [a,\, b]\rightarrow\mathbb{R}^n$.
γ נקראת בעלת אורך אם הקבוצה

$$\left\{L\left(\gamma\left(p\right)\right)\ \mid P\text{ is a partition of }\ [a,\, b]\right\}$$

היא קבוצה חסומה.
החסם העליון של קבוצה זו, אם קיים, נקרא אורך המסילה:

$$L\left(\gamma\right)=\sup\left\{L\left(\gamma\left(p\right)\right)\ \mid P\text{ is a partition of }\ [a,\, b]\right\}$$

דוגמה

נתבונן בפרמטריזציה של מעגל קנוני (מרכזו בראשית) שרדיוסו r:

$$\begin{aligned}\gamma\left(t\right) &= \left(r\cos t,\, r\sin t\right)\\ 0\leq & \ t\ \leq 2\pi\end{aligned}$$

אנו רוצים לעבור לפרמטריזציה לפי אורך הקשת:
כידוע, אורך הקשת של מעגל עם רדיוס r, מזוית 0 עד זוית t היא $L\left(t\right)=r\cdot t$.
לכן נוכל להגדיר:

$$\sigma\left(t\right)=rt$$

מצד שני, הפונק' ההופכית של σ היא:

$$\tau\left(t\right)=\frac{t}{r}$$

לכן, הפרמטריזציה של המעגל לפי אורך תהיה:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(t) &= (\gamma\circ\tau)(t)\\ &= \left(r\cos\left(\frac{t}{r}\right),\, r\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

נחשב את אורך המסילה $\hat{\gamma}$ מזווית 0 עד זווית s כלשהי, לפי נוסחה שתוכח באופן כללי בהמשך:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_0^s &= \int_0^s \left\|\hat{\gamma}'(t)\right\| dt\\ &= \int_0^s \sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{r}\right)+\cos^2\left(\frac{t}{r}\right)}dt\\ &= \int_0^s dt = s\end{aligned}$$

דוגמה נוספת

הפעם נחשב ישירות לפי הגדרה.

$$\begin{aligned}\gamma:\ [0,\,1] &\to \mathbb{R}^2\\ \gamma(t) &= (t,\,t)\end{aligned}$$

ניקח חלוקה כלשהי של $[0,\,1]$:

$$P=\left(t^0,\,..,\,t^k\right)$$

אזי:

$$\begin{aligned}L(\gamma(P)) &= \sum_{i=1}^k \left\|\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right\|\\ &= \sum_{i=1}^k \left\|\left(t^i,\,t^i\right)-\left(t^{i-1},\,t^{i-1}\right)\right\|\\ &= \sum_{i=1}^k \sqrt{\left(t^i-t^{i-1}\right)^2+\left(t^i-t^{i-1}\right)^2}\\ &= \sqrt{2}\sum_{i=1}^k \sqrt{\left(t^i-t^{i-1}\right)^2}\\ &= \sqrt{2}\left(t^k-t^0\right)=\sqrt{2}\end{aligned}$$

למה

מסילה גזירה ברציפות היא בעלת אורך.

הוכחה

תהי $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות ב$[a,\,b]$.
ניקח $t,\,t^*\in[a,\,b]$.
לכל $j=1,\,...,\,n$ הרכיב γ_j גזיר ברציפות ב$[a,\,b]$ ולכן לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' קיימות נק' ביניים $\tau^j\in[t,\,t^*]$ כך שמתקיים

$$\gamma_j\left(t^*\right)-\gamma\left(t\right)=\left(t^*-t\right)\cdot\gamma_j^{'}\left(\tau^j\right)$$

לכן:

$$\begin{aligned}\left\|\gamma\left(t^*\right)-\gamma\left(t\right)\right\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma_j\left(t^*\right)-\gamma_j\left(t\right)\right)^2}\\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{'}\left(\tau^j\right)^2\cdot\left(t^*-t\right)^2}\\ &= \left(t^*-t\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{'}\left(\tau^j\right)^2}\end{aligned}$$

מכיוון שלכל j, γ_j גזירה ברציפות ב$[a,\,b]$, $\gamma_j^{'}$ חסומה ב$[a,\,b]$. נגדיר:

$$\begin{aligned}M_j &= \max\left\{\left|\gamma_j^{'}\left(t\right)\right|\ \mid t\in[a,\,b]\right\}\\ m_j &= \min\left\{\left|\gamma_j^{'}\left(t\right)\right|\ \mid t\in[a,\,b]\right\}\end{aligned}$$

לכן:

$$\left(t-t^*\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\leq\left\|\gamma\left(t^*\right)-\gamma\left(t\right)\right\|\leq\left(t-t^*\right)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}$$

כעת, תהי

$$p=\left(t^0,\,...,\,t^k\right)$$

חלוקה כלשהי של $[a,\,b]$. ננסה להעריך את הביטוי

$$L\left(\gamma\left(P\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}\left\|\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right\|$$

לפי אי השוויון ממקודם נקבל:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(t^i-t^{i-1}\right)\leq\quad \textstyle\sum_{i=1}^{k}\left\|\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right\| &\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(t^i-t^{i-1}\right)\\ \sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\cdot\left(b-a\right)\leq\quad \textstyle\sum_{i=1}^{k}\left\|\gamma\left(t^i\right)-\gamma\left(t^{i-1}\right)\right\| &\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}\cdot\left(b-a\right)\end{aligned}$$

$$(b-a)\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\leq L\left(\gamma\left(p\right)\right)\leq\left(b-a\right)\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}$$

קיבלנו ש$L\left(\gamma\left(p\right)\right)$ חסום ע"י מספרים שאינם תלויים בחלוקה p, לכן מותר לעבור ל$\sup$ על כל החלוקות p כנ"ל ונקבל:

$$(b-a)\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\leq L\left(\gamma\right)\leq\left(b-a\right)\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}$$

לכן $L\left(\gamma\right)$ קיימת וחסומה בין שני המספרים הנ"ל.
כעת, בהינתן $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n$, לכל $t\in[a,b]$ נסמן ב$s\left(t\right)$ את אורכה של המסילה γ_a^t שהיא הצמצום של γ לקטע $[a,t]$, ונגדיר $s\left(a\right)=0$.

למה 2

תהי $\gamma:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות (מגב"ת) ב$[a,b]$.
אזי $s\left(t\right)$ פונק' גזירה ברציפות ב$[a,b]$ ומתקיים:

$$s^{'}\left(t\right)=\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert =\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{'}\left(t\right)^2}$$

הוכחה

תהי $t\in[a,b]$ נק' כלשהי. ניקח $h\in\mathbb{R}$ כך ש$t+h\in[a,b]$.
נוכיח:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{s\left(t+h\right)-s\left(t\right)}{h}=\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert$$

ובאופן אנלוגי מוכיחים:

$$\lim_{h\to0^-}\frac{s\left(t+h\right)-s\left(t\right)}{h}=\left\Vert \gamma^{'}\left(t\right)\right\Vert$$

ובכן, ניקח $h>0$, אזי $s\left(t+h\right)-s\left(t\right)$ שווה לאורך המסילה $L\left(\gamma_t^{t+h}\right)$.
לכן, ע"פ הלמה הקודמת נקבל:

$$h\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\leq s\left(t+h\right)-s\left(t\right)\leq h\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}$$

נחלק ב$h>0$ ונקבל:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}\leq\frac{s\left(t+h\right)-s\left(t\right)}{h}\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}$$

כאשר:

$$\begin{aligned} m_j &= \min\left\{\left|\gamma_j^{'}(\tau)\right| \ : \ \tau\in[t,\,t+h]\right\} \\ M_j &= \max\left\{\left|\gamma_j^{'}(\tau)\right| \ : \ \tau\in[t,\,t+h]\right\} \end{aligned}$$

כעת, מכיוון ש$\gamma_j^{'}$ רציפה ב$[t,\,t+h]$, אז $\left|\gamma_j^{'}\right|$ מקבלת שם את המקסימום שלה, לכן יש $0\leq\theta\leq1$ כך שמתקיים

$$M_j=\left|\gamma_j^{'}(t+\theta h)\right|$$

לכן:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0^+}M_j &= \lim_{h\to0^+}\left|\gamma_j^{'}(t+\theta h)\right| \\ &= \left|\gamma_j^{'}(t)\right| \end{aligned}$$

מכאן נקבל:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}M_j^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j^{'}(t)\right|^2}=\left\|\gamma^{'}(t)\right\|$$

באותה צורה עם m_j נקבל

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}m_j^2}=\left\|\gamma^{'}(t)\right\|$$

מכאן, מאי השוויון וכלל הסנדביץ'

$$\lim_{h\to0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\left\|\gamma^{'}(t)\right\|$$

באופן אנלוגי מראים לגבי הנגזרת השמאלית ולכן מקבלים שs גזירה ומתקיים

$$s^{'}(t)=\left\|\gamma^{'}(t)\right\|$$

משפט (נוסחת האורך)

תהי $\gamma:\ [a,\,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות ב$[a,\,b]$ אז γ בעלת אורך ומתקיים:

$$L(\gamma)=\int_a^b\left\|\gamma^{'}(t)\right\|dt=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{'}(t)}$$

הוכחה

על פי הלמה הראשונה, γ בעלת אורך.
ע"פ הלמה השניה, $s^{'}(t)=\left\Vert \gamma^{'}(t)\right\Vert$.
לכן, $s(t)$ היא פונק' קדומה של $\left\Vert \gamma^{'}(t)\right\Vert$. לכן, לפי המשפט היסודי של החשבון האינט-גרלי, נקבל:

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma^{'}(t)\right\Vert dt & = s(b)-s(a)\\ & = L(\gamma)-0=L(\gamma)\end{aligned}$$

דוגמה

אם המסילה נתונה ע"י הצגה פרמטרית:

$$\gamma(t)=(x_{1}(t),\,...,\,x_{n}(t))$$

נוכל לכתוב את $L(\gamma)$ כך:

$$L(\gamma)=\int_{a}^{b}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_{i}}{dt}\right)^{2}}dt$$

למשל, עבור $f:\,[a,\,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, אז הגרף של הפונק' f הוא תמונה המסילה $y=f(x)$:

$$\begin{aligned}\gamma(t) & = (1,\,f(t))\\ t & \in [a,\,b]\end{aligned}$$

במקרה שלנו יוצא:

$$\begin{array}{cc} x_{1}(t)=t & x_{2}(t)=f(t)\\ \frac{dx_{1}}{dt}(t)=1 & \frac{dx_{2}}{dt}=\frac{dy}{dx}\end{array}$$

ומכאן מקבלים את הנוסחה המוכרת:

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}dx$$

למשל, אם ניקח $y=x^{2}$ בקטע $[3,\,4]$.
לפי הנוסחה מקבלים:

$$L=\int_{3}^{4}\sqrt{1+(2x)^{2}}dx=\int_{3}^{4}\sqrt{1+4x^{2}}dx$$

משפט

1. תהי $\gamma:\ [a,\, b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך.
יהיו $\gamma^1,\,\gamma^2$ מסילות המתקבולות ע"י צמצום של γ לקטעים $[a,\, c]$ ו-$[c,\, b]$ בהתאמה.
אזי גם $\gamma^1,\,\gamma^2$ בעלות אורך ומתקיים

$$L\left(\gamma\right)=L\left(\gamma^1\right)+L\left(\gamma^2\right)$$

2. הכיוון ההפוך לו:
אם $\gamma^1\ :\ \ [a,\, c]\ \to\ \mathbb{R}^n$, $\gamma^2\ :\ \ [c,\, b]\ \to\ \mathbb{R}^n$ מסילות בעלות אורך, ונניח כי $\gamma^1\left(c\right)=\gamma^2\left(c\right)$.
נגדיר מסילה:

$$\gamma\left(t\right)=\begin{cases}\gamma^1\left(t\right) & t\in[a,\, c]\\ \gamma^2\left(t\right) & t\in[c,\, b]\end{cases}$$

אז γ בעלת אורך ומתקיים

$$L\left(\gamma\right)=L\left(\gamma^1\right)+L\left(\gamma^2\right)$$

לא נוכיח באופן מדויק אבל נציין שמספיק להראות כי $\gamma^1,\,\gamma^2$ בעלות אורך ואז האדי-טיביות של האורך נובעת מאדיטיביות האינטגרל במשתנה אחד.

דוגמאות

1. חישוב היקף מעגל ברדיוס R:
נניח בה"כ שהמעגל ממוקם עם מרכז בראשית.
המסילה היא:

$$\begin{aligned}\gamma\left(\theta\right) &= \left(R\cos\theta,\, R\sin\theta\right)\\ 0\leq\ \theta &\leq 2\pi\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\left\Vert \gamma^{'}\left(\theta\right)\right\Vert &= \left\Vert\left(-R\sin\theta,\, R\cos\theta\right)\right\Vert\\ &= \sqrt{\left(-R\sin\theta\right)^2+\left(R\cos\theta\right)^2}=R\end{aligned}$$

לכן היקף המעגל הוא:

$$L=\int_0^{2\pi}Rd\theta=2\pi R$$

2. נחשב אורך ענף של ציקלואידה. ענף כזה הוא הדרך שעוברת נק' על גלגל שמתגלגל גלגול שלם על הכביש בלי להחליק.
המסילה היא

$$\begin{aligned}\gamma:\ [0,\, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ \gamma\left(t\right) &= \left(a\left(t-\sin t\right),\, a\left(1-\cos t\right)\right)\end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}\left\|\gamma^{'}(t)\right\| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2(1-\cos t)^2}\\ &= a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1 - 2\cos t}\\ &= a\sqrt{2-2\cos t} = a\sqrt{2(1-\cos t)}\\ &= a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\end{aligned}$$

ואורך המסילה הוא

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt\\ &= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt\\ &= 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\\ &= 4a(1+1) = 8a\end{aligned}$$