לינארית 2 תירגולים

1 תירגול 1

.1

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$V_2=N\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}\right)=N\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=N\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_3=N\left(\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-2&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=N\left(\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

2. קשר בין ע"ע של A ל A^k ו A^{-1}': יהי λ ע"ע של A אזי: λ^k ע"ע של A^k, וכן $\frac{1}{\lambda}$ ע"ע של A^{-1}.
הוכחה: יהי v וקטור עצמי מתאים ל-λ, אזי מתקיים: $Av=\lambda v$, ולכן: $A^k v = A^{k-1}Av=A^{k-1}\cdot\lambda v=\lambda A^{k-1}v=\cdots=\lambda^k v$.
וכן: $v=Iv=A^{-1}Av=A^{-1}\lambda v=\lambda A^{-1}v$ ולכן $A^{-1}v=\lambda^{-1}v$.

3. לדומות יש אותו פ"א (הרצאה): נניח $A=P^{-1}BP$ אזי:

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=|\lambda I-P^{-1}BP|=|P^{-1}(\lambda I)P-P^{-1}BP|=|P^{-1}(\lambda I-B)P|=|\lambda I-B|=f_B(\lambda)$$

4. מטריצה ששורתיה מסכמות ל x אזי x ע"ע: נגדיר $v=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. אזי:

$$Av=\begin{pmatrix}\sum_i A_{1,i}\cdot 1\\\sum_i A_{2,i}\cdot 1\\\vdots\\\sum_i A_{n,i}\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_i A_{1,i}\\\sum_i A_{2,i}\\\vdots\\\sum_i A_{n,i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\\vdots\\x\end{pmatrix}=xv$$