**חשבון אינפי 2 למדמ"ח**
**שיעור 6: אינטגרלים לא אמיתיים**

# אינטגרלים על קטע אינסופי

**הגדרה:** תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$. נגדיר $\int_a^\infty f(x)dx$ ע"י

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^k f(x)dx.$$

באופן דומה מגדירים

$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^a f(x)dx$ עבור פונקציה $f$ הרציפה בקטע $(-\infty,a]$

ו־ $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$ עבור פונקציה $f$ הרציפה בכל הישר הממשי.

אם הגבולות המתאימים קיימים אומרים שהאינטגרלים **מתכנסים**, אחרת **מתבדרים**.

**דוגמא:** חשבו את האינטגרל $\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$.
**פתרון:**

$$\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$$

נציב $t = x^2-3$, $dt = 2xdx$. במקרה זה גבולות האינטגרציה החדשים הם $t = 2^2-3 = 1$ הגבול התחתון ו־$t = k^2-3$ הגבול העליון. לכן

$$\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_1^{k^2-3}\frac{dt}{2t^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left.(-2)t^{-\frac{1}{2}}\right|_1^{k^2-3} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{k^2-3}}+1\right) = 1.$$

**דוגמא:** חשבו את האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$.
**פתרון:**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{x+x^3}$$

נחשב קודם את האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{dx}{x+x^3}$

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left( \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \right) dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \Rightarrow 1 = (1+x^2)A + (Bx+C)x.$$

ע"י השוואת מקדמים נקבל

$$A+B=0,$$

$$C=0,$$

$$A=1,$$

ולכן

$$B=-1.$$

לסיכום נקבל

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}$$

כאשר $t = 1+x^2, dt = 2xdx$. לכן

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|t| + c = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c.$$

נחזור לאינטגרל הלא אמיתי

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty} \left( \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| \right) \Big|_1^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \Big|_1^k = \lim_{k\to\infty} \ln\left( \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right) - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \ln(1) - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

**דוגמא:** $\int_0^\infty x\sin(x)dx$

**פתרון:** נחשב את האינטגרל הלא מסוים $\int x\sin(x)dx$, נעשה אינטגרציה בחלקים

$$g' = \sin(x), f(x) = x \Rightarrow g = -\cos(x), f' = 1$$

ונקבל

$$\int_0^\infty x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c.$$

לכן

$$\int_0^\infty x\sin(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k x\sin(x)dx = \lim_{k\to\infty}\left(-x\cos(x)+\sin(x)\right)\Big|_0^k$$

$$= \lim_{k\to\infty} -k\cos(k) + \sin(k)$$

הגבול אינו קיים ולכן האינטגרל מתבדר.

# אינטגרלים על קטע סופי של פונקציות לא חסומות

**הגדרה:** תהי $f$ פונקציה רציפה ולא חסומה בקטע $[a,b)$ $(a<b)$. נגדיר $\int_a^b f(x)dx$ ע"י

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

באותו אופן מגדירים

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ עבור פונקציה $f$ רציפה ולא חסומה בקטע $(a,b]$ ו־

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ עבור פונקציה $f$ רציפה ולא חסומה בקטע $(a,b)$ כאשר $a<c<b$ (כלומר $f$ יכולה להיות לא חסומה בסביבת הנקודה $x=a$ או $x=b$).

**דוגמא:** חשבו את האינטגרל $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

**פתרון:**

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1+\epsilon}^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{1+\epsilon}^{2} = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(2-2\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

**דוגמא:** חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

**פתרון:** לפי ההגדרה $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

נבצע החלפת משתנים $x = e^t, t = \ln(x), dx = e^t dt$ כאשר $t = \ln\epsilon$ גבול תחתון ו־ $t = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ גבול עליון, ונקבל

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\ln(\epsilon)}^{-1} \frac{e^t dt}{e^t t^2} = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\ln(\epsilon)}^{-1} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{t}\Big|_{\ln(\epsilon)}^{-1}\right) = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{-1}+\frac{1}{\ln(\epsilon)}\right) = 1+\frac{1}{-\infty} = 1.$$

# תנאים לקיום אינטגרלים בקטע אינסופי

**הגדרה:** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$, אם האינטגרל $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס אז נאמר ש־$f$ **אינטגרבילית בהחלט** בקטע $[a,\infty)$ ונאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס בהחלט**.

**הגדרה:** תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$, אם קיים $M>0$ כך ש־ $\left|\int_a^b f(x)\right| \le M$ לכל $b>a$, אז נאמר שהאינטגרל של $f$ חסום בקטע $[a,\infty)$.

**משפט:** אם $f$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,\infty)$ אז היא גם אינטגרבילית בקטע זה.

**משפט ההשוואה:** יהיו $f$ ו־ $g$ פונקציות אי שליליות ורציפות בקטע $[a,\infty)$ כך ש־ $g(x)\ge f(x)$ לכל $x$ בקטע זה, אז

א. אם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

**משפט דריכלה:** אם $f$ ו־ $g$ הן שתי פונקציות רציפות בקטע $[a,\infty)$ כך שהאינטגרל של $f$ חסום בקטע $[a,\infty)$ ו־$g$ פונקציה מונוטונית (עולה או יורדת) כך ש־ $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ אז האינטגרל $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

**הערה:** את כל המשפטים וההגדרות שנוסחו לעיל אפשר לנסח בקטע $(-\infty,a]$.

**דוגמא:** האם האינטגרל $\int_e^\infty \frac{\sin(x)}{x\ln(x)}dx$ מתכנס? האם הוא מתכנס בהחלט?

**פתרון:** נסמן $f(x)=\sin(x)$ ו־ $g(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$. אז לכל $b>e$ נקבל

$$\left|\int_e^b \sin(x)\right| = \left|-\cos(x)|_e^b\right| = |-\cos(b)+\cos(e)| \le 2$$

לכן האינטגרל של $f$ חסום. כמו כן, בקטע $[e,\infty)$ הפונקציה $g$ מונוטונית יורדת ודועכת לאפס כאשר $x\to\infty$. לכן ממשפט דריכלה נקבל שהאינטגרל מתכנס. כעת נבדוק אם האינטגרל מתכנס בהחלט, נשתמש בכך ש־

$$|\sin(x)| \ge \sin^2(x), |x\ln(x)| = x\ln(x) \text{ if } x \ge e$$

ונקבל

$$\int_e^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\right| dx \ge \int_e^\infty \frac{\sin^2(x)}{x\ln(x)}dx = \int_e^\infty \frac{1-\cos(2x)}{2x\ln(x)}dx$$

$$= \int_e^\infty \frac{1}{2x\ln(x)}dx - \int_e^\infty \frac{\cos(2x)}{2x\ln(x)}dx$$

האינטגרל $\int_e^\infty \frac{\cos(2x)}{2x\ln(x)}dx$ מתכנס לפי משפט דריכלה (ניתן להוכיח זאת בדיוק באותה דרך הוכחה שהשתמשנו בתחילת הדוגמא). לעומת זאת, אם נבצע החלפת משתנים $x=e^t, dx=e^t dt$ באינטגרל הראשון נקבל

$$\int_e^\infty \frac{1}{2x\ln(x)}dx = \int_1^\infty \frac{e^t dt}{2e^t\ln(e^t)} = \int_1^\infty \frac{dt}{2t}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}\ln|\infty| - \frac{1}{2}\ln|1| = \infty.$$

לכן האינטגרל $\int_e^\infty \frac{\sin^2(x)}{x\ln(x)}dx$ הוא סכום של אינטגרל מתכנס ועוד אינטגרל מתבדר ולכן הוא בהכרח מתבדר. לכן ממבחן ההשוואה נקבל שהאינטגרל $\int_e^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\right| dx$ גם מתבדר.

**דוגמא:** קבעו האם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2\sin^2(x)}$ מתכנס או מתבדר.

**פתרון:** כיוון ש־ $1+x^2\sin^2(x) \le 1+x^2$ נקבל ש־ $\frac{x}{1+x^2\sin^2(x)} \ge \frac{x}{1+x^2}$ אם $x\ge 0$. לכן

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2\sin^2(x)} \ge \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}(1+x^2)'dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}\ln|\infty| - \frac{1}{2}\ln|1| = \infty.$$

לכן ממבחן ההשוואה האינטגרל מתבדר.

**דוגמא:** קבעו אם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx$ מתכנס או מתבדר.

**פתרון:** נרשום את האינטגרל בצורה

$$\int_0^\infty \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx = \int_0^1 \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx + \int_1^\infty \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx.$$

האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x+1}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx$ מתכנס כי אם נסמן $f(x) = \sin(x)$ ו־ $g(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ אז, כפי שהראינו, האינטגרל של $f$ חסום ו־g פונקציה מונוטונית יורדת (כסכום של פונקציות מונוטוניות יורדות) ושואפת לאפס כאשר $x \to \infty$.

את האינטגרל הראשון נרשום בצורה

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{x}} + \int_0^1 \frac{\sin(x)dx}{x\sqrt{x}} \quad (*)$$

כיוון ש־

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} < \infty$$

נובע שהאינטגרל הראשון בצד ימין במשוואה $(*)$ מתכנס. באינטגרל השני במשוואה $(*)$ נשתמש בכך ש־$\sin(x) \leq x$ אם $x \geq 0$ ונקבל

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)dx}{x\sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{xdx}{x\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} < \infty.$$

לכן גם אינטגרל זה מתכנס ולכן לסיכום קיבלנו שהאינטגרל $\int_0^\infty \frac{(x+1)}{x\sqrt{x}}\sin(x)dx$ מתכנס.

**מבחן המנה:** אם $f$ ו־$g$ הן שתי פונקציות אי שליליות ורציפות בקטע $[a,\infty)$, ונניח שקיים הגבול $L=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, אז

א. אם $0<L<\infty$ אז שני האינטגרלים $\int_a^\infty f(x)dx$ ו־$\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ב. אם $L=0$ והאינטגרל $\int_0^\infty g(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ג. אם $L=\infty$ והאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_0^\infty g(x)dx$ מתכנס.

**דוגמא:** האם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ מתכנס או מתבדר?

פתרון: נגדיר $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ו־ $g(x)=\frac{1}{1+x}$. אז

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{1+0}{\sqrt{0+1}}=1.$$

לכן כיוון שהאינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}=\ln|1+x||_0^\infty=\ln|\infty|-\ln|1|=\infty$$

מתבדר נקבל ממבחן המנה שגם האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ מתבדר.

**דוגמא:** האם האינטגרל $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}dx}{\sqrt{x+x^2}\sqrt[4]{1+x^6}\ln^2(1+x^2)}$ מתכנס או מתבדר?

פתרון: כיוון ש־

$$\sqrt{x+x^2}\sim x,\ \sqrt[4]{1+x^6}\sim x\sqrt{x},\ \ln(1+x^2)\sim 2\ln(x)$$

כאשר $x\to\infty$, נח יהיה להגדיר $g(x)=\frac{1}{x\ln^2(x)}$ ונגדיר את $f$ כפונקציה בתוך האינטגרל בשאלה. כיוון ש־

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2(x)x\sqrt{x}}{\sqrt{x+x^2}\sqrt[4]{1+x^6}\ln^2(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}\sqrt[4]{\frac{1}{x^6}+1}}\frac{\ln^2(x)}{\ln^2(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{\ln^2(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2(x)}{4\ln^2(x)}=\frac{1}{4}$$

נקבל ממבחן המנה שהאינטגרל בשאלה מתכנס אם"ם האינטגרל $\int_2^\infty g(x)dx$ מתכנס. כיוון ש־

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \left[x = e^t, dx = e^t dt\right] = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{t}\bigg|_{\ln(2)}^\infty = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\ln(2)} < \infty$$

לכן האינטגרלים של $g$ ושל $f$ מתכנסים.