תרגול 4 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

1 מטריצות

הגדרה 1.1. כזכור מהתרגול הקודם, **מטריצה** היא טבלה של מספרים. מסמנים מטריצה כך: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. אם למטריצה יש m שורות ו-n עמודות, נאמר שהגודל שלה הוא $m \times n$.
את אוסף המטריצות מגודל $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$ נסמן $\mathbb{F}^{m\times n}$. סימונים נוספים: $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$ ועוד.

הערה 1.2. שתי מטריצות הן שוות אם הן מאותו גודל וכל איבריהן שווים בהתאמה.

הגדרה 1.3. נגדיר פעולות על מטריצות:

1. חיבור: אם A, B מאותו גודל, נגדיר את $A+B$ להיות המטריצה שאיבריה הם סכום האיברים של A ושל B בהתאמה. למשל,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

2. חיסור: באופן דומה.

3. כפל בסקלר: אם $\alpha \in \mathbb{F}$ ואם $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, αA תהיה הכפלת כל איברי A ב-α. למשל,

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

4. כפל מטריצות: אם A מגודל $m \times n$ ואם B מגודל $n \times \ell$, מגדירים את AB כך: AB היא המטריצה מגודל $m \times \ell$ כך שהאיבר במקום ה-i,j שלה הוא

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

במילים אחרות, עוברים על השורה ה-i-ית של A ועל העמודה ה-j-ית של B, כופלים כל זוג איברים מתאימים וסוכמים את המכפלות.

דוגמה 1.4. נציג מספר דוגמאות לכפל מטריצות:

.1

$$\begin{pmatrix}1&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot0&1\cdot3+3\cdot1&1\cdot4+3\cdot(-1)\\4\cdot2+5\cdot0&4\cdot3+5\cdot1&4\cdot4+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&1\\8&17&11\end{pmatrix}$$

2. הכפל $\begin{pmatrix}1&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&-1\end{pmatrix}$ אינו מוגדר, כי $3\neq2$.

.3

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot5\\0\cdot1+3\cdot3+4\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\29\end{pmatrix}$$

הערה 1.5. לרוב $AB\neq BA$ (גם אם שתי המכפלות מוגדרות, ואפילו אם הן מאותו גודל). למשל,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

טענה 1.6 (תכונות הפעולות על מטריצות). נציג כמה תכונות של הפעולות הנ"ל:

1. חיבור מטריצות מקיים את התכונות המוכרות לנו משדות:
   (א) הוא אסוציאטיבי – לכל $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $(A+B)+C=A+(B+C)$.
   (ב) הוא קומוטטיבי – לכל $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $A+B=B+A$.
   (ג) האיבר הניטרלי הוא **מטריצת האפס**, כלומר מטריצה שכולה אפסים (מגודל $m\times n$). נסמן אותה 0.
   (ד) הנגדי של A הוא $(-1)\,A$.
2. כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי: לכל A,B,C מגדלים מתאימים (כלומר, כך שכל מכפלה בטענה מוגדרת), $(AB)\,C=A\,(BC)$.
3. לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ ולכל A,B מגדלים מתאימים, $\alpha\,(AB)=(\alpha A)\,B=A\,(\alpha B)$.

הגדרה 1.7. מטריצת היחידה מסדר $n\times n$, המסומנת I_n, היא $\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}$.

טענה 1.8. לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$.

כפל מטריצות ומערכות משוואות לינאריות

בתרגול הקודם אמרנו שיש דרך מקוצרת לרשום מערכת משוואות – $Ax=b$. כעת, נוכל להבין מדוע:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

דרכים נוספות לכפול מטריצות

הגדרה 1.9. מטריצה מגודל $m\times 1$ נקראת **וקטור עמודה**; מטריצה מגודל $1\times n$ נקראת **וקטור שורה**. $\mathbb{F}^m$ יהיה אוסף וקטורי העמודה מגודל $m\times 1$.

הגדרה 1.10. תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. נסמן ב-$R_i(A)$ את השורה ה-i-ית של A, וב-$C_j(A)$ את העמודה ה-j-ית של A.

יש לנו שתי טענות העוזרות לכפול מטריצות בקלות:

טענה 1.11 (כפל עמודה-עמודה). תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$. אזי

$$A\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(B) & \cdots & C_k(B) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\cdot C_1(B) & \cdots & A\cdot C_k(B) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

בנוסחה, $C_i(AB)=A\cdot C_i(B)$.

טענה 1.12 (כפל שורה-שורה). תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$. אזי

$$\begin{pmatrix} - & R_1(A) & - \\ & \vdots & \\ - & R_m(A) & - \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} - & R_1(A)\cdot B & - \\ & \vdots & \\ - & R_m(A)\cdot B & - \end{pmatrix}$$

בנוסחה, $R_i(AB)=R_i(A)\cdot B$.

תרגיל 1.13. יהי v פתרון של המערכת $Ax=b$, ויהי w פתרון של המערכת $Ax=0$. חשבו את

$$A\cdot\begin{pmatrix} v & w & v+w & v-w & w-v \end{pmatrix}$$

פתרון. ניעזר בכפל עמודה-עמודה, ונקבל:

$$\begin{aligned} A\cdot\begin{pmatrix} v & w & v+w & v-w & w-v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Av & Aw & A(v+w) & A(v-w) & A(w-v) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Av & Aw & Av+Aw & Av-Aw & Aw-Av \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b & 0 & b & b & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל 1.14. תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, ויהי $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ וקטור. הוכיחו:

$$Av = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i\left(A\right)$$

הוכחה. נוכיח ישירות:

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix} = \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1 C_1\left(A\right) + \cdots + x_n C_n\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i\left(A\right) \end{aligned}$$

□

הגדרה 1.15. ב-$\mathbb{F}^n$, **וקטור היחידה ה-i-י** הוא

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-th row}$$

תרגיל 1.16. הוכיחו כי לכל $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $Ae_i = C_i\left(A\right)$.

הוכחה. לפי התרגיל הקודם,

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{n} \left(e_i\right)_j C_j\left(A\right) = 0 \cdot C_1\left(A\right) + \cdots + 1 \cdot C_i\left(A\right) + \cdots + 0 \cdot C_n\left(A\right) = C_i\left(A\right)$$

□

מטריצות הפיכות

הגדרה 1.17. **מטריצה ריבועית** היא מטריצה שבה מספר השורות שווה למספר העמודות. את אוסף המטריצות הריבועיות נסמן $\mathbb{F}^{n\times n}$, אבל גם $M_n\left(\mathbb{F}\right)$, $Mat_n\left(\mathbb{F}\right)$ וכו'.

הגדרה 1.18. מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא **הפיכה**, אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ שעבורה

$$AB = BA = I$$

המטריצה B היא יחידה, ונקראת **ההופכית של** A, ומסומנת A^{-1}.

אלגוריתם 1.19 (אלגוריתם גאוס-ז'ורדן למציאת ההופכית)**.** נניח שנתונה מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. מדרגים

$$(A \mid I) \to (I \mid B)$$

אם בצד שמאל קיבלנו בדרך שורת אפסים, המטריצה A אינה הפיכה. אחרת, המטריצה B היא בדיוק ההופכית של A.

דוגמה 1.20. ניקח את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, ונחשב את A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-2R_3\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

כלומר A הפיכה, וכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

טענה 1.21 (תכונות המטריצה ההופכית).

1. אם A מטריצה הפיכה, אזי גם A^{-1} הפיכה, ומתקיים $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. אם A ו-B הפיכות, אזי גם AB הפיכה, ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
   בכיוון ההפוך, אם AB הפיכה, אז גם A וגם B הפיכות.
3. לכל $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ ולכל A הפיכה, $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
4. לכל $n \in \mathbb{N}$, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

הערה 1.22 (טריק למציאת ההופכית עבור 2×2). תהי מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי A הפיכה אם ורק אם $ad-bc \neq 0$, ומתקיים

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.23. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם שורת אפסים. הוכיחו: A אינה הפיכה.

הוכחה. נניח שהשורה ה-i-ית של A היא שורת אפסים. לפי כפל שורה-שורה, לכל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$,

$$R_i(AB) = R_i(A)B = 0\cdot B = 0$$

ולכן לא יכול להיות ש-$AB = I$ עבור איזושהי B. $\square$

תרגיל 1.24. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה. נניח ש-A^2+A הפיכה. הוכיחו: A ו-$A+I$ הפיכות.

הוכחה. נשים לב כי $A^2+A=A\left(A+I\right)$. לפי הטענה שאמרנו, אם מכפלה של מטריצות הפיכה, כל מטריצה במכפלה הפיכה. לכן, גם A וגם $A+I$ הפיכות. $\square$