תורת הקבוצות — תרגיל בית 2
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

כ"ה בניסן, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, רישא, $\in$־טרנזיטיביות, סודרים, השוואת סודרים, סודר עוקב, סודר גבולי.

תזכורות

1. $\in$־טרנזיטיבות וסודרים

- קבוצה A היא **$\in$־טרנזיטיבית** אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in a$ מתקיים $b \in A$.
- $\bigcup A \coloneqq \{x \colon \exists y \in A,\, x \in y\}$, $\bigcap A \coloneqq \{x \colon \forall y \in A,\, x \in y\}$.
- קבוצה A היא **סודר** אם היחס $\in$ הוא יחס סדר טוב עליה ואם היא $\in$־טרנזיטיבית.
- כל איבר של סודר הוא סודר.
- קבוצה $\in$־טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.
- $\varnothing \coloneqq 0$, וזהו הסודר הקטן ביותר ביחס הסדר $\in$.
- תהי $\mathcal{F}$ קבוצת סודרים. אזי $\min \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$, $\sup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}$. מתקיימות תכונות המינימום והסופרמום.

2. הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים

- $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, וזה הסודר העוקב המיידי של α.
- **סודר עוקב** הוא סודר β שקיים עבורו סודר α כך ש־$\beta = S(\alpha)$.
- **מספר טבעי** הוא סודר שהן הוא והן כל קודמיו הינם סודרים עוקבים או 0. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים על ידי

$$\omega \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ω הוא הסודר הלא־טבעי הראשון. הוא גם הסודר הגבולי הראשון.

- **סודר גבולי** הוא סודר שאיננו אפס ואיננו עוקב.

*להגשה עד יום חמישי כ"ז בניסן (16 אפר') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

3. פונקציות שומרות סדר ורישאות

- תהיינה $(A,<),(B,\prec)$ קבוצות סדורות בסדר מלא, ותהי פונקציה $f\colon A\to B$. נאמר שפונקציה זו היא **שומרת סדר** (או: מונוטונית) אם לכל $x<y\in A$ מתקיים $f(x)\prec f(y)$. אם הפונקציה הזו היא הפיכה, אז היא נקראת **איזומורפיזם סדר**, ונסמן זאת $A\overset{f}{\cong}B$ (ניתן להשמיט את f לפי העניין).
- תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), B תת־קבוצה. נאמר ש־B היא **רישא**[1] של A אם לכל $y\in B$ ולכל $x\in A$ המקיים $x<y$, מתקיים $x\in B$. במילים: רישא היא תת־קבוצה שכל קודמי איבריה הם איברים שלה.
- תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), $x\in A$. נסמן את ה**רישא הנקבעת על ידי x ב־A** כך:

$$\overset{x}{A}:=\{y\in A\colon y<x\}$$

יש רישאות שאינן נקבעות על ידי איבר כלל.

1 $\in$־טרנזיטיביות

1. תהי A קבוצה. הראו כי התכונות הבאות שקולות:

(א) A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית.

(ב) לכל $B\in A$, מתקיים $B\subseteq A$.

(ג) $\bigcup A\subseteq A$.

הראינו בכיתה (א) $\leftarrow$ (ב) $\leftarrow$ (ג), ההוכחות לכך מצורפות. השלימו את ההוכחה.

פתרון

- (א) $\leftarrow$ (ב). תהי A $\in$־טרנזיטיבית, ותהי $B\in A$. נראה כי $B\subseteq A$. יהי $x\in B$, אזי מתקיים $x\in B\in A$, ומכיוון ש־A $\in$־טרנזיטיבית, מתקיים $x\in A$. הראנו, אפוא, כי $B\subseteq A$, כנדרש.
- (ב) $\leftarrow$ (ג). נניח את (ב). כדי להראות את (ג) עלינו להראות שלכל $x\in\bigcup A$ מתקיים $x\in A$. נניח אם כן $x\in\bigcup A$. מהגדרת איחוד, קיים y כך ש־$x\in y\in A$. כעת, לפי (ב), מהנתון $y\in A$ ניתן להסיק ש־$y\subseteq A$. בסך הכל $x\in y\subseteq A$, ובקיצור $x\in A$, והראנו את ההכלה.
- (ג) $\leftarrow$ (א). עלינו להראות שאם $x\in y\in A$ אז $x\in A$. נניח שאכן $x\in y\in A$. אזי לפי הגדרת איחוד של קבוצה, $x\in\bigcup A$. לפי (ג), $\bigcup A\subseteq A$, ולכן $x\in A$. ■

2. עבור קבוצה A, נגדיר ברקורסיה על המספרים הטבעיים:

(א) $A_0:=A$.

[1] לתשומת לבכם, הגדרה זו שונה מההגדרה בה השתמש המרצה בהרצאה! בתרגול הגדרנו את המושג רישא לכל קבוצה סדורה בסדר קווי, ואילו ההגדרה של המרצה היא המתאימה לקבוצות סדורות היטב דווקא.

(ב) עבור $n \geq 0$, $A_{n+1} := A_n \cup \bigcup A_n$.

נסמן את **הסגור הטרנזיטיבי** (transitive closure) של A על ידי $\mathrm{tc}(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

הוכיחו: $\mathrm{tc}(A)$ היא הקבוצה ה־$\in$־טרנזיטיבית הקטנה ביותר (מבחינת הכלה) המכילה את A. (לפניכם שלוש טענות: $\mathrm{tc}(A)$ היא $\in$־טרנזיטיבית, מכילה את A, ולכל קבוצה $\in$־טרנזיטיבית B המכילה את A מתקיים $\mathrm{tc}(A) \subseteq B$.)

פתרון נחלק את ההוכחה לשלבים המנויים בסוגרים.

- $\in$־טרנזיטיביות: יהיו x, y המקיימים $x \in y \in \mathrm{tc}(A)$. אזי, לפי הגדרת $\mathrm{tc}(A)$ כאיחוד קבוצה, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$y \in A_n$. אם כן, מצאנו כי $x \in y \in A_n$, ולכן, מהגדרת איחוד, $x \in \bigcup A_n \subseteq A_{n+1}$, ולכן $x \in \mathrm{tc}(A)$.
- $A \subseteq \mathrm{tc}(A)$: טריוויאלי, כי $A = A_0$.
- מינימליות: תהי B קבוצה $\in$־טרנזיטיבית המכילה את A. נראה באינדוקציה לכל $n \in \mathbb{N}$ את ההכלה $A_n \subseteq B$. עבור $n = 0$ זה נתון (כי $A_0 = A \subseteq B$). נניח כי ההכלה מתקיימת עבור A_n, כאשר $n \in \mathbb{N}$, ונראה עבור $n+1$. יהי $x \in A_{n+1}$ נתון. אזי $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup A_n$. לפיכך, מתקיים אחד מהשניים:
  - $x \in A_n$, ולפי הנחת האינדוקציה $A_n \subseteq B$, ולכן $x \in B$; או
  - $x \in \bigcup A_n$, ואז קיים $y \in A_n$ כך ש־$x \in y$. לפי הנחת האינדוקציה, $A_n \subseteq B$, ולכן $x \in y \in B$. מכיוון ש־B $\in$־טרנזיטיבית, קיבלנו $x \in B$.

  ביחד, בכל מקרה הראנו $x \in A_{n+1} \to x \in B$, או $A_{n+1} \subseteq B$, והשלמנו האינדוקציה. לסיום, מהגדרת הסגור הטרנזיטיבי כאיחוד קבוצה, עולה הנדרש. ■

3. נתון ש־A היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, המקיימת $\{\{\varnothing\}\} \in A$. מצאו דוגמא לקבוצה A שכזו, והראו כי A איננה סודר. הסיקו כי $\in$־טרנזיטיביות איננה מספיקה לבדה לטעון שקבוצה היא סודר. היעזרו בתרגיל הקודם.

פתרון לפי התרגיל הקודם, ניתן לקחת כל קבוצה B המקיימת $\{\{\varnothing\}\} \in B$, ולבחור $A := \mathrm{tc}(B)$, ולקבל בכך קבוצה $\in$־טרנזיטיבית המכילה את B, כנדרש כאן. אנו נדגים את המקרה המינימלי, כאשר $B = \{\{\{\varnothing\}\}\}$:

$$\begin{aligned}
B_0 &= B = \{\{\{\varnothing\}\}\} \\
B_1 &= B_0 \cup \bigcup B_0 = \{\{\{\varnothing\}\}\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\} \\
B_2 &= B_1 \cup \bigcup B_1 = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing\}, \varnothing\} = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \varnothing\} \\
B_3 &= B_2 \cup \bigcup B_2 = \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}, \varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}, \varnothing\} = B_2
\end{aligned}$$

מצאנו ש־$B_3 = B_2$, ולכן לכל n גדול יותר מתקיים $B_{n+1} = B_n = B_2$. בסך הכל, $\mathrm{tc}(B) = B_2$. לפי התרגיל הקודם, $\{\{\varnothing\}\} \in \mathrm{tc}(B)$, וזו קבוצה $\in$־טרנזיטיבית.
כעת נראה כי כל קבוצה A המקיימת את תנאי השאלה איננה סודר. לפי התרגיל

הקודם, $\operatorname{tc}(B) \subseteq A$, ובפרט $\{\{\varnothing\}\} \in A$, ומתקיים $\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$, אבל $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$, ולכן $\in$ איננו יחס טרנזיטיבי. כך מצאנו ש־$\in$ איננו סדר טוב על A, ולכן A איננו סודר. ■

4. <u>תרגיל רשות</u>: ההגדרה שלנו לסודר היא: α הוא סודר אם
   (א) היחס $\in$ על α הוא יחס אנטי־רפלקסיבי.
   (ב) יחס זה הוא טרנזיטיבי.
   (ג) לכל תת־קבוצה לא ריקה A של α יש איבר ראשון ביחס השייכות, דהיינו איבר $\gamma \in A$ כך שלכל $\beta \in A$ מתקיים $\gamma \in \beta$ או $\gamma = \beta$.
   (ד) הקבוצה α היא $\in$־טרנזיטיבית.

ראינו בשאלה הקודמת ש־(ד) לבדו איננו מספיק כדי להראות שקבוצה היא סודר, ואנו נזקקים לבדוק את דרישות (ב) ו־(ג). האם ניתן לוותר על אחת משתי דרישות אלו? לדוגמא, האם קבוצה A $\in$־טרנזיטיבית הסדורה בסדר מלא על ידי $\in$ היא בהכרח סודר?[2]

5. <u>תרגיל רשות</u>: נמקו מדוע מחלקת כל הסודרים ON איננה קבוצה.

2 הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים

ענו על שאלות 1 ו־2, וכן על אחת מהשאלות 3 ו־4.

1. יהיו α, β סודרים הראו כי $\beta \leq \alpha \iff \beta < S(\alpha)$. הסיקו כי $S(\alpha)$ הוא ה**עוקב המיידי**[3] של α.

פתרון ($\Longleftarrow$). מתקיים $\beta \leq \alpha < S(\alpha)$. ניתן להביט בכל אלה כאיברים של $S(S(\alpha))$ ולהיעזר בטרנזיטיביות של היחס, או להביט ב־$S(\alpha)$ ולהיעזר ב־$\in$־טרנזיטיביות.
($\Longrightarrow$). נשתמש בהגדרת העוקב, $\beta \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. לכן יש שתי אפשרויות: $\beta \in \alpha$ או $\beta = \alpha$. שתי אפשרויות אלו יחדיו נותנות $\beta \leq \alpha$. ■

2. יהיו α, β סודרים הראו כי $S(\alpha) < S(\beta) \iff \alpha < \beta$.

פתרון ($\Longleftarrow$). נניח $S(\alpha) < S(\beta)$. לפי הגדרה, הכוונה היא $S(\alpha) \in \beta \cup \{\beta\}$. מהגדרת איחוד, יש שתי אפשרויות:

- $S(\alpha) \in \beta$. ואז $\alpha \in S(\alpha) \in \beta$, ומטרנזיטיבות (ב־$S(\beta)$), $\alpha \in \beta$.
- $S(\alpha) = \beta$. אבל $\alpha \in S(\alpha)$, וביחד נקבל $\alpha \in \beta$.

בסך הכל קיבלנו $\alpha < \beta$.

($\Longrightarrow$). נניח $\alpha < \beta$, דהיינו $\alpha \in \beta$. מתכונות סודרים, גם $\alpha \subseteq \beta$[4]. מנגד, מהנתון נובע גם $\{\alpha\} \subseteq \beta$. שני אלה גם יחד גוררים גם את האיחוד: $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. לפי משפט שהוכחנו בשיעור התרגיל, זה אומר $S(\alpha) \leq \beta$. נוסיף את הידוע, $\beta < S(\beta)$, ונקבל $S(\alpha) < S(\beta)$, כנדרש. ■

---

[2] בעתיד אנו צפויים להגיע לאקסיומת היסודיות. מאקסיומת היסודיות ניתן להסיק שלכל קבוצה A, $A \notin A$. בפרט, אם לוקחים את אקסיומת היסודיות, אז ניתן לוותר על דרישה (א).

[3] בקבוצה סדורה סדר מלא, אין בין איבר ל**עוקב המיידי** לו אף איבר אחר.

[4] הוכח בשיעור התרגיל כי $A \subseteq \alpha$ א.ס.ם. $A = \alpha$ או $A \in \alpha$, עבור A $\in$־טרנזיטיבית.

3. יהי $\alpha > 0$ סודר. הראו כי אם ל־α יש איבר אחרון אזי האיבר האחרון הזה הוא $\sup\alpha$, ומתקיים $S(\sup\alpha) = \alpha$, ו־α סודר עוקב. הראו גם כי אם ל־α אין איבר אחרון, אזי $\sup\alpha = \alpha$, ו־α גבולי.
לשון אחר: α סודר עוקב $\Longleftrightarrow$ יש ב־α איבר אחרון $\Longleftrightarrow$ $\sup\alpha$ איבר אחרון ב־α,
וכן הראו כי α סודר גבולי $\Longleftrightarrow$ $\sup\alpha = \alpha$.
שתי הטענות יחד נותנות קריטריון להבחין בין סודר עוקב לגבולי על פי השאלה אם יש לו מקסימום או לא.

פתרון

(א) נראה הטענות לגבי סודר עוקב:

- נניח $\alpha = S(\beta)$ עוקב. אזי $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. נראה כי β אחרון. נניח בשלילה כי קיים $\beta < \gamma$ ב־α. בפרט, $\beta \neq \gamma$, ולכן $\gamma \in \alpha \setminus \{\beta\} = \beta$, ולכן $\gamma < b$. סתירה.
- נניח יש ב־α אחרון β. מהגדרת סופרמום, $\beta \in \alpha \to \sup\alpha \geq \beta$. מנגד, מהגדרת אחרון, לכל $\beta < \gamma$, ולכל $\delta \in \alpha$, $\delta < \gamma$. לכן $\sup\alpha < \gamma$, ומשכך $\sup\alpha \geq \beta$. ביחד מתקבל שויון $\beta = \sup\alpha$.
- נניח $\sup\alpha$ איבר אחרון ב־α. אזי מתקיים $\sup\alpha \in \alpha$ או $\sup\alpha < \alpha$ או $S(\sup\alpha) \leq \alpha$ או $S(\sup\alpha) \subseteq \alpha$. אם לא מתקיים שויון, אזי קיים $\gamma \in \alpha \setminus S(\sup\alpha)$. $S(\sup\alpha)$ היא קבוצה טרנזיטיבית, ולכן $\gamma \notin S(\sup\alpha)$, ומשכך $\sup\alpha < S(\sup\alpha) \leq \gamma \in \alpha$, ובסתירה להגדרת סופרמום.

(ב) נראה עבור סודר גבולי. בהתחשב בסעיף הקודם, נותר רק להראות כי $\sup\alpha \notin \alpha$ א.ס.ם. $\sup\alpha = \alpha$. ובכן, $\sup\alpha$ הוא סודר (הוכיחו!), ולכן ניתן להשוואה עם α. נניח בשלילה $\sup\alpha > \alpha$, אבל לכל $\beta \in \alpha$, $\beta < \alpha$, ולכן α הוא חסם מלעיל של עצמו, ומשכך הוא $\leq$ סופרמום של עצמו. אם כן, הראנו כי תמיד $\sup\alpha \leq \alpha$. אזי לפי הסעיף הקודם, הוא איננו איבר של α א.ס.ם. הוא איננו עוקב. ■

4. הוכיחו את שתי האקסיומות הראשונות מרשימת אקסיומות פאנו:

(א) לכל $n \in \omega$, $S(n) \neq 0$.

(ב) לכל $m, n \in \omega$, $S(m) = S(n) \Longrightarrow m = n$.

(ג) אקסיומת האינדוקציה (לא להוכחה): תהי $A \subseteq \omega$ המקיימת $0 \in A$ וכן לכל $n \in A$ גם $S(n) \in A$. אזי $A = \omega$.

אקסיומות פאנו מתקיימות עבור קבוצת המספרים הטבעיים ω.

פתרון

(א) $n \in S(n)$, ולכן $S(n) \neq \varnothing$.

(ב) נניח בשלילה $m < n$. מהשויון הנתון, $n \in S(m) = m \cup \{m\}$, וביחד עם ההנחה בשלילה, $n \in S(m) \setminus \{m\} = m$. קיבלנו $n < m$, ובסתירה להנחה.
■

3 איזומורפיזם סדר, רישאות וטיפוסי סדר

1. תהיינה A, B קבוצות סדורות איזומורפיות סדר. הראו כי כל רישא של A איזומורפית סדר לרישא של B. האם רישא הנקבעת על ידי איבר מתאימה דווקא לרישא הנקבעת על ידי איבר?

פתרון נניח כי $f\colon A \to B$ איזומורפיזם סדר, ותהי $X \subseteq A$ רישא. לפי הגדרת רישא, מתקיים: לכל $x \in X$ ולכל $a \in A$ המקיימים $a < x$ מתקיים $a \in X$. כעת נפעיל את האיזומורפיזם f, ונסמן $Y = f\left(X\right)$. יהי $y \in Y$ ו־$b \in B$ המקיים $b < y$. נפעיל את f^{-1}, ונקבל $f^{-1}\left(b\right) < f^{-1}\left(y\right)$, ומכך ש־$X$ רישא ב־A, נובע $f^{-1}\left(b\right) \in X$, ולכן $b = f\left(f^{-1}\left(b\right)\right) \in f\left(X\right) = Y$. אם כן, הרישא X עברה לרישא Y. מכיוון ש־f^{-1} גם הוא איזומורפיזם סדר, הטענה נכונה גם מרישא של B לרישא של A.

כעת נביט ברישא הנקבעת על ידי x, $\overset{x}{A}$. כשנפעיל את f נקבל את הרישא $\overset{f(x)}{f\left(A\right)} = \overset{f(x)}{B}$, הנקבעת על ידי $f\left(x\right)$. ■

2. תהיינה A, B קבוצות סדורות, כך שקיימות פונקציות שומרות סדר בשני הכיוונים: $f\colon A \to B$ וכן $g\colon B \to A$.

(א) הפריכו: A איזומורפית סדר ל־B.

(ב) ידוע כי הטענה הופכת לנכונה כאשר ידוע ש־A, B סדורות היטב. האם מספיק לדעת ש־A סדורה היטב?

שימו לב לדמיון עם משפט קנטור־ברנשטיין.[5]

פתרון

(א) ניקח $A = \left[-1, 1\right], B = \left(-1, 1\right)$, קבוצות ממשיים עם הסדר הרגיל. נגדיר $f\left(x\right) = g\left(x\right) = \frac{x}{2}$. ברור שהפונקציות שהגדרנו שומרות סדר, אך $A \ncong B$ כי ל־A יש ראשון ואחרון ול־B אין.

(ב) די לדעת ש־A סדורה היטב. נניח כי A סדורה היטב, ונראה שגם B סדורה היטב. ניקח $\varnothing \neq D \subseteq B$, ונביט ב־$g\left(D\right)$. זו תת־קבוצה לא ריקה של A, ולכן יש לה איבר ראשון a. מכיוון ש־g שומרת סדר, היא חח"ע. נביט אפוא ב־$g^{-1}\left(a\right) \in D$. זהו האיבר הראשון של D. הראנו כאן כי B גם היא סדורה היטב. ■

ב ה צ ל ח ה!

[5] או: משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין.