תוכן תרגיל כיתה 7

תזכורת

הגדרה מרחב טופולוגי נקרא *קומפקטי* אם כל כיסוי פתוח שלו מכיל תת כיסוי סופי.

קריטריון (עם קבוצות סגורות)

מ"ט קומפקטי אם"ם כל אוסף תת קבוצות סגורות $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ המקיים

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$$

מכיל תת אוסף סופי $\{F_{\alpha_1},\dots,F_{\alpha_n}\}$ כך ש- $F_{\alpha_1}\cap\dots\cap F_{\alpha_n}=\emptyset$.

הערה. כשמשתמשים בקריטריון אין טעם להתבונן במקרה של $I=\emptyset$ כי אוסף ריק הוא בעצמו כבר סופי.

בעיה 1

יהי X מרחב טופולוגי , כך שכל תת-קבוצה סגורה שלו $F\neq X$ - קומפקטית. הוכיחו ש-X קומפקטי.

הוכחה. יהי X מ"ט ובו $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף תת קבוצות סגורות כך ש-.

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$$

אם $F_\alpha = X$ לכל $\alpha\in I$, אז $X=\emptyset$, אזי הוכח ש-X קומפקטי.
נתבונן באפשרות ההפוכה, כלומר, כשקיים $\alpha_0\in I$ כך ש- $F_{\alpha_0}\neq X$. לפי התנאי F_{α_0} קומפקטית .
לכל $\alpha\in I$ נסמן : $S_\alpha = F_\alpha\cap F_{\alpha_0}$. אזי כל S_α סגורת ב-F_{α_0} כי הנחנו שקבוצות F_α סגורות ב-X . לגבי האוסף S_α מקבלים:

$$\bigcap_{\alpha\in I} S_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\left(F_\alpha \cap F_{\alpha_0}\right) = \left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)\bigcap F_{\alpha_0} = \emptyset$$

כיוון ש- S_α סגורת ב-F_{α_0}, כלומר, במרחב הקומפרטי, אפשר לפי הקריטריון לטעון שקיימים $\{S_{\alpha_1},\dots,S_{\alpha_n}\}$ כך ש-

$$S_{\alpha_1}\cap\dots\cap S_{\alpha_n} = \emptyset$$

אבל מזה נובע:

$$S_{\alpha_1}\cap\dots\cap S_{\alpha_n} = \left(F_{\alpha_1}\cap F_{\alpha_0}\right)\cap\dots\cap\left(F_{\alpha_n}\cap F_{\alpha_0}\right) =$$
$$F_{\alpha_1}\cap\dots\cap F_{\alpha_n}\cap F_{\alpha_0} = \emptyset$$

כלומר, מצאנו תת אוסף סופי ב-$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שחיתוכו ריק.
אזי לפי אותו הקריטריון X קומפקטי, מש"ל.

<u>בעיה 2</u>
תהי X קבוצה אינסופית עם אוסף תת קבוצות T המוגדר באופן הבא: $T = \{\emptyset\} \cup \left\{U \subseteq X \middle| U^c \text{ קבוצה סופית } \right\}$.

<u>הוכיחו</u>:
א' T טופולוגיה (נקראת *טופולוגיה קו-סופית*),
ב' מ"ט (X,T) קשיר,
ג' מ"ט (X,T) קומפקטי.
ד' $f(X)=[a,b]$ אם פונקציה $f:(X,T)\to\mathbb{R}$ רציפה.

<u>הוכחות.</u>

א) <u>טופולוגיה</u>
1. $\emptyset \in T$ לפי הגדרה. $X = \emptyset^c \in T$ כי $\emptyset$ קבוצה סופית.

2. יהי $U_\alpha \in T$ לכל $\alpha \in I$. אם כל הקבוצות U_α ריקות אז אחודן גם ריק ושייך ל-T . אם הן לא כולן ריקות אזי לפי חוקי דה מורגן $(\cup_{\alpha\in I} U_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in I} U_\alpha^c$ ובין הקבוצות U_α^c ישנה קבוצה סופית ולכן $\cap_{\alpha\in I} U_\alpha^c$ קבוצה סופית.
אזי $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha$ שייך ל-T (לפי ההגדרה) .
3. יהי $U_n \in T$ לכל $1 \le n \le K \in \mathbb{N}$. אם יש בין הקבוצות U_n קבוצה ריקה אז $\cap_{1\le n\le K} U_n = \emptyset \in T$.
אם כל הקבוצות U_n לא ריקות אזי כל הקבוצות U_n^c סופיות. לכן (דה מורגן) $\cup_{1\le n\le K} U_n^c = (\cap_{1\le n\le K} U_n)^c$.
והאחוד באגף ימין הוא סופי. אז $\cap_{1\le n\le K} U_n$ שייך ל- T.

הוכח ש-T טופולוגיה. מש"ל.

ב) <u>קשירות</u>. נניח – <u>בשלילה</u> ש-(X,T) אינו קשיר. אזי קיימת קבוצה $U \subseteq X$ כך ש-

$$U, U^c \neq \emptyset \quad (*)$$

$$U, U^c \in T \quad (**)$$

ברור גם ש-

$$U \cup U^c = X \quad (***)$$

אבל מ-$(**)$ נובע ש-U, U^c קבוצות סופיות. לכן – בגלל $(***)$ – גם X קבוצה סופית <u>שסותר לתנאי</u>. אז X קשיר. מש"ל

ג) <u>קומפקטיות</u>.
יהי $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף תת קבוצות סגורות ב-(X,T) כך ש-.

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$$

אם $F_\alpha = X$ לכל $\alpha \in I$ אז החיתוך שווה ל-X. לכן X ריק ואז קומפקטי.

אם להפך, קיים $\alpha_0 \in I$ כך ש- $F_{\alpha_0} \neq X$, אז F_{α_0} קבוצה סופית.

אם $F_{\alpha_0} = \emptyset$ אז $\{F_{\alpha_0}\}$ הוא התת-אוסף הסופי המבוקש ו-X קומפקטי.

אם $F_{\alpha_0} \neq \emptyset$, אז F_{α_0} סופית.

במקרה הזה, תהי $F_{\alpha_0} = \{x_1, \dots, x_n\}$ כאשר $x_1, \dots, x_n \in X$.

כיוון שאין איברים ששייכים לכל הקבוצות F_α (אחרת החיתוך המלא לא ריק!) :

קיים $\alpha_1 \in I$, כך ש-$x_1 \notin F_{\alpha_1}$

קיים $\alpha_2 \in I$, כך ש-$x_2 \notin F_{\alpha_2}$

....

קיים $\alpha_n \in I$, כך ש-$x_n \notin F_{\alpha_n}$

מזה מייד נובע ש-

$$F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \cap F_{\alpha_0} = \emptyset \qquad (****)$$

כי אחרת (<u>בשלילה</u>) בחיתוך הזה יש לפחות איבר אחד ובפרט הוא שייך ל-F_{α_0}, כלומר, איבר x_j $(1 \le j \le n)$. אבל אם זה המצב, אז $x_j \notin F_{\alpha_j}$ והוא לא יכול להיות שייך לחיתוך $(****)$.

<u>סתירה.</u> אז $\left\{F_{\alpha_j}\right\}_{\mathbf{0 \le j \le n}}$ הוא תת אוסף המבוקש.

לכן (X, T) קומפקטי, מש"ל.

ד) $\underline{f(X) \subseteq \mathbb{R}}$

כיוון ש-f רציפה, לפי משפטים מההרצאות, $f(X)$ תת קבוצה קשירה וגם קומפקטית. הקשירות מביאה אותנו

למסקנה שהקבוצה $f(X)$ היא קטע ב-$\mathbb{R}$ (מסוג איזשהו).
$\mathbb{R}$ מרחב האוסדורף ולכן הקבוצה הקומפקטית $f(X)$ היא גם סגורה.
בתור קומפקטית במרחב מטרי היא גם חסומה.
אז קיבלנן ש-$f(X)$ קטע חסום וסגור , כלומר זה קטע מסוג $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R})$. מש"ל.

<u>בעיה 3</u>
(קומפקטיפיקציה.) יהי $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\}$ כאשר $p \notin \mathbb{R}^n$.
נגדיר אוסף τ של תת-קבוצות ב-X:

$$\tau = \left\{ U \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, U \text{ פתוחה ב } \mathbb{R}^n \right\} \cup$$
$$\{ \{p\} \cup (\mathbb{R}^n - F) \mid F \text{ קומפקטית ב } \mathbb{R}^n \}.$$

<u>הערה להגדרת</u> τ.
בהגדרה של τ אפשר להחליף "F קומפקטית ב $\mathbb{R}^n$ " במילים "F סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^n$" כי ב-$\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית היא קבוצה:
- סגורה כי $\mathbb{R}^n$ מרחב האוסדורף,
- חסומה כי $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי.

ולפי משפט היינה- בורל גם טענה בכיוון הפוכה נכונה:
קבוצה סגורה וחסומה ב- $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה קומפקטית .
=====================================

<u>א' הוכיחו</u> ש- τ טופולוגיה על X.
<u>ב' הוכיחו</u> ש- (X,τ) מרחב טופולוגי קומפקטי.

הוכחה

א' (טופולוגיה)

(i) $X = \mathbb{R}^n \cup \{p\}$ שייכת ל-τ כי
∅ קומפקטית ו-$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n - \emptyset$.
∅ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ ולכן גם שייכת ל-τ .

(ii) אחוד. אפשרות 1: אוסף קבוצות השייכות ל-τ המשתתפות באחוד מכיל רק קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$ אז אחודן פתוח ב-$\mathbb{R}^n$ ולכן שייך ל-τ .

אפשרות 2: באחוד משתתפות גם קבוצות מסוג $K^c \cup \{p\}$ כאשר K קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$. במקרה הזה נקבץ את הקבוצות המופיעות באחוד בשני אחודים חלקיים:

$$W = \cup_{\alpha\in I} (\{p\} \cup F_\alpha^c) \cup \left(\cup_{\beta\in J} U_\beta\right)$$

כאן W - תוצאת האחוד, F_α קומפקטיות ב-$\mathbb{R}^n$ ו- U_β פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$. נמשיך את החישוב:

$$W = \{p\} \cup \left[(\cup_{\boldsymbol{\alpha\in I}} F_\alpha^c) \cup \left(\cup_{\boldsymbol{\beta\in J}} U_\beta\right)\right]$$

ברור שהקבוצה בסוגריים מרובעים מוכלת ב-$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.**

תהי F היא המשלים שלה ב-$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. אזי:

$W = \{p\} \cup F^c$ כאשר:

$$F = \left[(\cup_{\boldsymbol{\alpha\in I}} F_\alpha^c) \cup \left(\cup_{\boldsymbol{\beta\in J}} U_\beta\right)\right]^{\boldsymbol{c}} =$$

$$(\cap_{\boldsymbol{\alpha\in I}} \boldsymbol{F_\alpha}) \cap (\cap_{\boldsymbol{\beta\in J}} U_\beta^c)$$

שום דבר לא ישתנה כאן (תורת הקבוצות) אם נבחר קבוצה אחת קומפקטית $\boldsymbol{F_{\alpha_0}}$ ועוד פעם נוסיף אותה לחיתוך:

$$F = \boldsymbol{F_{\alpha_0}} \cap (\cap_{\boldsymbol{\alpha\in I}} \boldsymbol{F_\alpha}) \cap (\cap_{\boldsymbol{\beta\in J}} U_\beta^c)$$

כל הקבוצות $\boldsymbol{F_\alpha}$ ו- U_β^c סגורות ב-$\mathbb{R}^n$. אז מקבלים:
$F = \boldsymbol{F_{\alpha_0}} \cap S$ כאשר S סגורה כחיתוך סגורות .
נובע מזה שתת קבוצה F סגורה בתת מרחב קומפקטי $\boldsymbol{F_{\alpha_0}}$ ולכן F קומפקטחת בעצמה.
אם ניזכר ש- $W = \{p\} \cup F^c$, אז נראה ש- $W \in \tau$, מש"ל.

(iii) <u>חיתוך סופי.</u> <u>אפשרות 1:</u> אוסף סופי קבוצות השייכות ל-τ המשתתפות בחיתוך מכיל רק קבוצות מסוג $\{p\} \cup F^c$ כאשר F קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$. אז חיתוכן G נראה כך:

$$G = (\{p\} \cup F_1^c) \cap \ldots \cap (\{p\} \cup F_n^c) = \{p\} \cup (F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c) = \{p\} \cup (F_1 \cup \ldots \cup F_n)^c$$

האחוד $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ סגור וחסום ולפי משפט היינה-בורל גם קומפקטי, לכן $G \in \tau$, מש"ל.

<u>אפשרות 2:</u> בחיתוך משתתפות גם קבוצות פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$. במקרה הזה החיתוך G נראה כך:

$$G = (\{p\} \cup F_1^c) \cap \ldots \cap (\{p\} \cup F_n^c) \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right) = \left(\{p\} \cup (F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c)\right) \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right) = \left(\{p\} \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right)\right) \cup \left(F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right)\right)$$

כאן $\left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right)$ מוכל ב-$\mathbb{R}^n$,
לכן $\{p\} \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right) = \emptyset$, שגורר:

$$G = F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c \cap \left(\cap_{j=1}^m \ U_j\right)$$

כאן $F_1, \ldots, F_n$ סגורות ב-$\mathbb{R}^n$ ולכן $F_1^c, \ldots, F_n^c$ פתוחות.
אזי G פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ כחיתוך סופי של פתוחות ב-$\mathbb{R}^n$ ואז $G \in \tau$.

שלושת אקסיומות הטופולוגיה נבדקו והוכח ש-τ טופולוגיה, מש"ל.

ב' נוכיח ש- (X,τ) מרחב טופולוגי קומפקטי. למטרה זו נשתמש בקריטריון של קבוצות סגורות.
הקבוצות הסגורות ב-(X,τ) הן משלימים של קבוצות פתוחות במרחב הזה. לכן קיימים שני סוגים של הקבוצות הסגורות
כלומר, אם H סגורה ב-(X,τ) אז:

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \boldsymbol{X} - (\{\boldsymbol{p}\} \cup \boldsymbol{F^c}) = \boldsymbol{F}\,, \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} - \text{קומפקטית ב} \ \boldsymbol{F} \ (\text{סוג } "\boldsymbol{F}") \\ \boldsymbol{X} - \boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{p}\} \cup \boldsymbol{U^c} = \{\boldsymbol{p}\} \cup \boldsymbol{S}\,, \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} - \text{סגורה ב} \ \boldsymbol{S} \ (\text{סוג } "\mathbf{pS}") \end{cases}$$

נקח אוסף $\{H_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות סגורות ב-X כך ש-

$$\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha = \emptyset$$

$I \neq \emptyset$ (דובר בתכילת המסמך)
אם כל H_α הן מסוג "pS" אז כל H_α מכיל את הנקודון $\{p\}$ והחיתוך לא ריק – סתירה.
כלומר, תמיד קיים α_0 כך ש- H_{α_0} מסוג "F",
ז"א, H_{α_0} קומפקטית ב-$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
קל לראות ש-

$$\bigcap_{\alpha\in I}\left(H_\alpha \cap H_{\alpha_0}\right) = \left(\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha\right) \cap H_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha = \emptyset$$

נתבונן בחיתוך $H_{\alpha_0} \cap H_\alpha$ לאיזשהו $\alpha \in I$.
אם H_α מסוג "pS" אז $H_\alpha = \{p\} \cup S_\alpha$ כאשר S_α סגורה ב-$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. אזי:

$$H_\alpha \cap H_{\alpha_0} = (\{p\} \cup S_\alpha) \cap H_{\alpha_0} =$$
$$\left(\{p\} \cap H_{\alpha_0}\right) \cup \left(S_\alpha \cap H_{\alpha_0}\right) = \emptyset \cup \left(S_\alpha \cap H_{\alpha_0}\right)$$
$$= S_\alpha \cap H_{\alpha_0}$$

והקבוצה $H_\alpha \cap H_{\alpha_0}$ סגורה ב-H_{α_0}.

אם H_α מסוג "F" אז $H_\alpha = F_\alpha$ כאשר F_α קומפקטית ב-$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
אזי:

$$H_\alpha \cap H_{\alpha_0} = F_\alpha \cap H_{\alpha_0}$$

והקבוצה $H_\alpha \cap H_{\alpha_0}$ שוב סגורה ב-H_{α_0}.
אבל H_{α_0} קומפקטית לכן מהשוויון

$$\bigcap_{\alpha \in I} \left(H_\alpha \cap H_{\alpha_0}\right) = \emptyset$$

נובע שקיימים אינדקסים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ כך ש-

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \left(H_{\alpha_i} \cap H_{\alpha_0}\right) = \emptyset$$

אבל באגף השמאל:

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \left(H_{\alpha_i} \cap H_{\alpha_0}\right) = \left(\bigcap_{1 \le i \le n} H_{\alpha_i}\right) \cap H_{\alpha_0} = \bigcap_{\boldsymbol{0 \le i \le n}} H_{\alpha_i}$$

לכן לבסוף:

$$\bigcap_{\boldsymbol{0 \le i \le n}} H_{\alpha_i} = \emptyset$$

כלומר, מצאנו תת אוסף סופי עם חיתוך ריק. אזי (X, τ) קומפקטי, מש"ל.