טופולוגיה- עבודת בית תשף

1. יהי (X,d) מרחב מטרי שבו כל נקודה בכל כדור פתוח משמשת כמרכז הכדור. (כלומר, אם $y \in B(x,r)$ אז $B(x,r) = B(y,r)$). הוכיחו/ הפריכו: המטריקה היא אולטרה מטריקה.

2. בתרגיל הבא ניתן דוגמה להעתקה לינארית בין מרחבים נורמיים שאינה רציפה.
תזכורת: הקבוצה
$$l_\infty = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sup_n |x_n| < \infty\}$$
היא מרחב נורמי עם נורמת הסופרימום
$$||(x_n)|| = \sup |x_n|$$
(שמוגדרת לפי הגדרת l_∞).
נסתכל על תת המרחב של הסדרות המתאפסות לבסוף, כלומר על $A = \{(x_n) | \exists i, \forall j > i\ x_j = 0\}$ ונגדיר העתקה
$$f : A \to \mathbb{R}$$
ע"י:
$$f((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$
שמוגדרת היטב מכיוון שהסכום $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ הוא בעצם סכום סופי (לפי הגדרת A). קל לראות שזוהי העתקה לינארית (אין צורך להוכיח זאת). הוכיחו כי f אינה רציפה.
(בונוס למי שמוצא דוגמה נוספת להעתקה לינארית לא רציפה בין מרחבים נורמיים).

3. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) יהי X מרחב טופולוגי, ויהיו $A \subseteq B \subseteq X$. אם A צפוף ב B ו B צפוף ב X אז A צפוף ב X.

(ב) חיתוך סופי של קבוצות צפופות הוא קבוצה צפופה.

(ג) חיתוך סופי של קבוצות צפופות ופתוחות הוא קבוצה צפופה.

(ד) חיתוך בן מניה של קבוצות צפופות ופתוחות הוא קבוצה צפופה.

4. נגדיר את הטופולוגיה הבאה על $X = \mathbb{N} \cup \{p\}$ (לשם הדיוק: p אינו שייך לקבוצת הטבעיים) ע"י

$$\tau = P(\mathbb{N}) \cup \{O \subseteq X : |O^c| < \infty\}$$

כלומר, קבוצה פתוחה ב X היא תת קבוצה של $\mathbb{N}$ או שהמשלים שלה סופי.

(א) הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.

(ב) תהא A תת קבוצה של X, מצאו את הסגור ,הפנים והשפה שלה. (חלקו למקרים).

(ג) מי הקבוצות הצפופות בX?

(ד) מבין תכונות ההפרדה T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 - איזה תכונה הכי חזקה הטופולוגיה מקיימת?

(ה) הוכיחו את הטענות הבאות:

i. לכל $x \in \mathbb{N}$, הסדרות שמתכנסות ל x הן הסדרות הקבועות לבסוף על x (ביחס לטופולוגיה τ!).

ii. סדרה מתכנסת לp אמ"ם כל איבר מ $\mathbb{N}$ שמופיע בסדרה, מופיע בה מספר סופי של פעמים.

5. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ ע"י $\tau = \{O \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin O\} \cup \{\mathbb{R}\}$, כלומר קבוצה פתוחה היא קבוצה ש 0 לא שייך אליה (או כל $\mathbb{R}$).

(א) הוכיחו שהמרחב אינו מטריזבלי.

(ב) תהי $f : (\mathbb{R}, \tau) \to \mathbb{R}$ (כאשר הטווח $\mathbb{R}$ הוא עם הטופולוגיה האוקלידית). הוכיחו שאם f רציפה אז היא קבועה.