תרגיל 8

1. יהיו $X_1, ..., X_n$ מרחבים טופולוגיים, עם טופולוגיות τ_i ובסיסים B_i בהתאמה. הראו שהקבוצה $B_\pi = \{O_1 \times \cdots \times O_n | O_i \in B_i\}$ היא בסיס לטופולוגיית המכפלה.
פתרון:

ידוע שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה היא איחוד של מכפלות של קבוצות פתוחות. לכן מספיק להוכיח שכל מכפלה של קבוצות פתוחות, $U_1 \times \cdots \times U_n$ היא איחוד של קבוצות מB_τ.

ובכן, יהי $(x_1, ..., x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$. אז לכל i, $x_i \in U_i$. מהגדרת בסיס, לכל i קיים $O_i \in B_i$ כך ש$x \in O_i \subseteq U_i$. לכן

$$(x_1, ..., x_n) \in O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq U_1 \times \cdots \times U_n$$

2. יהיו $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X = \prod X_i$ (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי, עם המטריקה

$$d_{\max}(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) | 1 \le i \le n\}$$

פתרון:

לכל B_i יש בסיס שמורכב מכדורים פתוחים. לכן לפי תרגיל 1 הקבוצה הבאה היא בסיס לטופולוגיית המכפלה:

$$B_\pi = \{B(x_1, r_1) \times \cdots \times B(x_n, r_n)\}$$

לעומת זאת, לטופולוגיה שמושרית מהמטריקה יש בסיס שמורכב מכפדורים פתוחים $B_{d_{\max}}(x, \varepsilon)$.
נשים לב ש:

$$y \in B_{d_{\max}}(x, \varepsilon) \iff d_{\max}(x, y) < \varepsilon \iff \max\{d_i(x_i, y_i) | 1 \le i \le n\} < \varepsilon \iff \forall i, d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$$

$$\iff \forall i, y_i \in B_{d_i}(x_i, \varepsilon) \iff y \in \prod B_{d_i}(x_i, \varepsilon)$$

לכן $B_{d_{max}}(x,\epsilon)=\prod B_{d_i}(x_i,\epsilon)$.

קיבלנו שכל כדור פתוח לפי המטריקה הוא פתוח לפי טופולוגיית המכפלה, לכן הטופולוגיה שמושרית מהמטריקה מוכלת בטופולוגיית המכפלה.

מצד שני, נראה שכל קבוצה מהצורה $B(x_1,r_1)\times\cdots\times B(x_n,r_n)$ פתוחה לפי המטריקה.

יהי $(y_1,...,y_n)\in B(x_1,r_1)\times\cdots\times B(x_n,r_n)$.

מכיוון שכל כדור פתוח במטריקה הוא קבוצה פתוחה, קיימים ϵ_i כך ש $B(y_i,\epsilon_i)\subseteq B(x_i,r_i)$.
נבחר $\epsilon=\min\{\epsilon_1,...,\epsilon_n\}$. אז

$$B((y_1,...,y_n),\epsilon)=\prod B_{d_i}(y_i,\epsilon)\subseteq\prod B_{d_i}(y_i,\epsilon_i)\subseteq B(x_1,r_1)\times\cdots\times B(x_n,r_n)$$

לכן הקבוצה $B(x_1,r_1)\times\cdots\times B(x_n,r_n)$ פתוחה לפי המטריקה. ומכאן נקבל שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיית המכפלה פתוחה בטופולוגיה המושרית מהמטריקה. כלומר, טופולוגיית המכפלה מוכלת בטופולוגיה המושרית מהמטריקה.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגיית המכפלה).
פתרון:

(א) לפי התרגיל הקודם, $X\times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה $d_{\max}$.
נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה $d_{\max}$ ולכן גם רציפה לפי τ_π.
תהי $(x,y)\in X\times X$ ויהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}((x,y),(z,w))<\delta$ אז:

$$|d(x,y)-d(z,w)|=|d(x,y)-d(y,z)+d(y,z)-d(z,w)|\leq|d(x,y)-d(y,z)|+|d(y,z)-d(z,w)|\leq$$

$$d(x,z)+d(y,w)<\delta+\delta=\epsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר השלישי נובע מא"ש המשולש).

4. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ספרבילים. האם $X\times Y$ ספרבילי?
פתרון:

(א) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A\subseteq X,B\subseteq Y$ צפופות ובנות מניה.
מתרגיל שעשינו בכיתה:

$$cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$$

כלומר:

$$cl(A\times B)=X\times Y$$

ולכן $A\times B\subseteq X\times Y$ צפופה.
מכיוון שהקבוצות A,B הן בנות מניה גם $A\times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת. יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח).
לכן $X\times Y$ ספרבילי.

5. יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים טופולוגיים T_1. הוכיחו שמרחב המכפלה הוא T_1.
פתרון:

(א) אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה.
אם כן, יהי $\prod\{x_i\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j}=X_j$ אם $i\neq j$ ו-$Y_{i,j}=X_j\setminus\{x_j\}$ אם $i\neq j$.
בכל מקרה, $Y_{i,j}\subseteq X_j$ פתוחה (אם $i=j$, מכיוון ש-X_j הוא T_1 הנקודון $\{x_j\}\subseteq X_j$ הוא סגור ולכן $X\setminus\{x_j\}$ פתוחה).
מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j Y_{i,j}\subseteq\prod_j X_j$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i\prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות).
לכן $\prod\{x_i\}$ סגורה.

6. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש: $X\times Y\cong Y\times X$.
פתרון:

(א) נגדיר פונקציה $f:X\times Y\to Y\times X$ על ידי:

$$f(x,y)=(y,x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1\circ f:X\times Y\to Y$$

שווה לפונקציה $p_2:X\times Y\to Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2\circ f:X\times Y\to X$$

שווה לפונקציה $p_1:X\times Y\to X$.
לכן הפונקציות $p_1\circ f,p_2\circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה.
קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1}:Y\times X\to X\times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y,x)=(x,y)$.
f^{-1} רציפה (בדומה ל-f) ולכן f הומיאומורפיזם.

7. הוכיחו שהאותיות הבאות אינן הומיאומורפיות (כתתי קבוצות של $\mathbb{R}^2$):

$$K,B,C,D$$

פתרון:

בK יש נקודה שאם נסיר נקבל מרחב בין 4 רכיבי קשירות, ובשום אות אחרת אין נקודה כזאת. לכן K לא הומיאומורפי לכל השאר.

בC כל נקודה שנוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו בB ובD יש נקודות שאם נוריד המרחב עדיין ישאר קשיר, לכן C לא הומיאומורפי לBוD.

בB יש נקודה שאם נוריד תהפוך את המרחב ללא קשיר, ואילו בD כל נקודה שנוריד תשאיר את המרחב קשיר. לכן B וD לא הומיאומורפיים.

8. הוכיחו שאם $f : X \to Y$ הוא הומיאומורפיזם, ו$A \subseteq X$, אז $f|_A : A \to f[A]$ הפונקציה המצומצמת, היא הומיאומורפיזם.
פתרון:

חח"ע ועל זה ברור.

נוכיח רציפות:

תהי $O \subseteq f[A]$ פתוחה. כלומר, $O = U \cap f[A]$ כאשר U פתוחה בY. אז

$$f|_A^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[O] = A \cap f^{-1}[U \cap f[A]] = A \cap f^{-1}[U] \cap f^{-1}[f[A]] = A \cap f^{-1}[U]$$

פתוחה בטופולוגיית תת המרחב על A.

הרציפות של f^{-1} המצומצמת על $f[A]$ מתקבלת בדיוק באותה צורה.