

פתרון תרגיל לעבודה עצמית 10

שאלה 1

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ הוכח ש } \lambda = 1 \text{ הוא ערך עצמי של המטריצה}$$

פתרון

נחשב את הערך העצמי

$$\text{ולכן } \lambda = 1 \text{ הוא ערך עצמי. (מכיוון שביקשו להוכיח אין צורך לפתור)} \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

אלא רק להציב ולבדוק)

נחשב את הבסיס לווקטור העצמי כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$$\text{ולכן הווקטור העצמי הוא } (1, 0, -1) \quad \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ תהיי מצא:}$$

א. הפולינום האופייני וערכים עצמיים של B .

ב. מצא את הווקטורים העצמיים.

פתרון

א.

הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda - 5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda + 3)[(\lambda - 5)(\lambda + 2) + 6] + 7(\lambda + 2) - 6 - 42 - 6(\lambda - 5) = \\ &= (\lambda + 3)[\lambda^2 - 3\lambda - 4] + \lambda - 4 = (\lambda + 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1) + 1(\lambda - 4) = \\ &= [(\lambda + 3)(\lambda + 1) + 1](\lambda - 4) = (\lambda^2 + 4\lambda + 4)(\lambda - 4) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

ואז הערכים העצמיים הם: $-2, 4$.

ב.

נמצא את המרחב העצמי עבור $\lambda = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \text{ ז"א יש למצוא את הפתרון הכללי של המערכת } Ax = 0 \text{ כאשר}$$

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ואז הפתרון הכללי הוא $\{t(0,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$.

נמצא בסיס למרחב העצמי עבור $\lambda = -2$.

ז"א יש למצוא פתרון כללי של המערכת $Ax = 0$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

לאחר דירוג נקבל את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ואז הפתרון הכללי הוא $\{t(1,1,0) : t \in \mathbb{R}\}$.

שאלה 3

א. מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ב. הראה A ניתנת ללכסון ומצא מטריצה P כך ש $P^{-1}AP$ היא אלכסונית.

ג. חשב את A^{10} .

פתרון

א.

נמצא את הערכים העצמיים

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)^2 = 0$$

שימו לב שיש לבדוק עבור $\lambda = 1$ בנפרד.

יש שני ערכים עצמיים $\lambda = 0, \lambda = -1$.

אם $\lambda = 0$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

אם $\lambda = -1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ב.

מכיוון שמצאנו ארבעה ווקטורים עצמיים אז A ניתנת ללכסון והמטריצה האלכסונית היא

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^3 - 10z^2 + 34z = 0$

ב. $z^2 - (1-3i)z - 2i - 2 = 0$

ג. $(i+1)(x+iy) = 4+2i$. x, y מספרים ממשיים.

פתרון

א.

$$z^3 - 10z^2 + 34z = 0$$

$z(z^2 - 10z + 34) = 0$ או $z = 0$ או $z^2 - 10z + 34 = 0$

$$z^2 - 10z + 34 = 0$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$z_1 = 5 + 3i$$

$$z_2 = 5 - 3i$$

תשובה סופית: $z_1 = 5 + 3i, z_2 = 5 - 3i, z_3 = 0$

ב.

$$z^2 - (1-3i)z - 2i - 2 = 0$$

$$z = \frac{1-3i \pm \sqrt{(1-3i)^2 + 8i + 8}}{2} = \frac{1-3i \pm \sqrt{2i}}{2}$$

ראינו בתרגול ש $(1+i)^2 = 2i$

$$z = \frac{1-3i \pm (1+i)}{2}$$

$$z_1 = 1-i$$

$$z_2 = -2i$$

תשובה סופית: $z_1 = 1-i, z_2 = -2i$.

ג.

$$(i+1)(x+iy) = 4+2i$$

$$x-y+(x+y)i = 4+2i$$

בתרגול ראינו ש $a+bi = c+di \leftrightarrow a=c \wedge b=d$ לכן יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \rightarrow x=3, y=-1$$

תשובה סופית: $x=3, y=-1$.

שאלה 5

חשב, ללא שימוש במשפט דה מואבר, את הביטויים הבאים:

$$.א. (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8$$

$$.ב. \frac{5}{3+2i}$$

$$.ג. (1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71}$$

פתרון

$$.א. (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8 = (\sqrt{2})^8 (1+i)^8 = 16((1+i)^2)^4 = 16(2i)^4 = 256$$

$$.ב. \frac{5}{3+2i} = \frac{5}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{15-10i}{13} = \frac{15}{13} - \frac{10}{13}i$$

$$.ג. (1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71}$$

תחילה נחשב את הסכום $1+i+i^2+\dots+i^{34}$

נשים לב ש $1+i+i^2+i^3=0$ ובאופן כללי לכל n טבעי מתקיים $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$

ולכן $1+i+i^2+\dots+i^{34} + i^{35} = 0 \rightarrow 1+i+i^2+\dots+i^{34} = -i^{35}$

$$.1+i+i^2+\dots+i^{34} = i \leftarrow i^{35} = i^{4 \cdot 8} \cdot i^3 = -i$$

$$.כעת (1+i+i^2+\dots+i^{34})^{71} = i^{71} = i^{4 \cdot 17} \cdot i^3 = -i$$

שאלה 6

א. הראה שלכל מספר מרוכב $z = a+bi$ יש הופכי ונגדי.

$$.ב. \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ הוכח שלכל שני מספרים מרוכבים } z_1, z_2 \text{ (השונים מ } 0) \text{ מתקיים}$$

ג. בסדרה הנדסית נתון: $a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

הוכח שלכל n טבעי סכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ד. פתור, בעזרת משפט דה מאובר, את המשוואות הבאות:

i. $z^7 = 1$

ii. $z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$

פתרון

ג. תחילה נמצא את מנת הסדרה.

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \cdot \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב את הביטוי $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow r = 1$

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = 60^\circ$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$

סה"כ נקבל: $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^6 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

נחשב את הסכום של הסדרה ההנדסית.

מנת הסדרה היא $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S_{6n} = \frac{a_1 \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{6n} - 1 \right)}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \frac{a_1 (1^n - 1)}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = 0$$

ד. $1 = \cos(360^\circ k) + i \sin(360^\circ k)$ כאשר k מספר שלם.

$$z^7 = \cos(360^0 k) + i \sin(360^0 k)$$

$$z_k = \cos\left(\frac{360^0 k}{7}\right) + i \sin\left(\frac{360^0 k}{7}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 6$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10} = (\cos 45^0 + i \sin 45^0)^{10} = \cos 450^0 + i \sin 450^0 = \cos 90^0 + i \sin 90^0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} ((1+i)^2)^5 = \frac{1}{2^5} \cdot 2^5 \cdot i^5 = i = \cos 90^0 + i \sin 90^0 \text{ :דרך נוספת לחישוב:}$$

$$z^4 = \cos(90^0 + 360^0 k) + i \sin(90^0 + 360^0 k)$$

$$z_k = \cos(18^0 + 72^0 k) + i \sin(18^0 + 72^0 k)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$