

בחינה בקורס אנליזה הרמונית

המרצה: פרופ' ניר לב

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר שהוא.
עבור כל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדיוק.
בבחינה 15 שאלות, משקל כל שאלה 7 נקודות.

חלק א

נתונה הפונקציה $f(x) = (x - \pi)^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

1. אילו מהטענות הבאות נכונה לגבי טור פורייה של f ?

2. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

3. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$?

חלק ב

4. מהו ערכו של האינטגרל הבא? (העזרו בהתמרת פורייה)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cos \omega \, d\omega$$

חלק ג

נתונה הפונקציה $f(x) = (2x + \pi)e^{x^2}$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

5. אילו מהטענות הבאות נכונה לגבי טור פורייה של f ?

6. מהו ערכו של הסכום $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$?

7. מהו ערכו של הסכום $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$?

8. אילו מהטענות הבאות נכונה לגבי הטור $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$?

חלק ד

נתון כי התמרת פורייה של פונקציה $f(x)$ מסויימת היא

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + |\omega|}$$

9. מהו ערכו של האינטגרל $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$?

10. מהו ערכו של האינטגרל $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx$?

11. אילו מהטענות הבאות נכונה לגבי האינטגרל $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$?

חלק ה

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2/\pi$ בקטע $[0, \pi]$.

12. לאיזה ערך מתכנס טור סינוסים של f בנקודה $x = -\pi/2$?

13. לאיזה ערך מתכנס טור סינוסים של f בנקודה $x = \pi$?

חלק ו

תהי $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V .

14. האם קיים ווקטור $v \in V$ כך ש- $|\langle v, e_n \rangle| > \frac{1}{10\sqrt{n}}$ לכל n ?

15. האם קיים ווקטור $v \in V$ כך שמתקיים $|\langle v, e_n \rangle| > \frac{1}{10\sqrt{n}}$ עבור $n = 1, 2, 3, \dots, 100$?

בהצלחה !