שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א': 01.07.14

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

1. יהי (e_1, e_2) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$. יהי $C \subset \mathbb{R}^2$ עקומת Jordan חלקה עם פרמטריזציה $\alpha(s)$ במהירות יחידה. יהי $v(s)$ וקטור מהירות שלה. יהי $\theta(s)$ הזווית נמדד נגד כיוון השעון בין e_1 לבין $v(s)$.
   א. הגדר פונקצית עקמומיות $k_\alpha(s)$.
   ב. הגדר עקמומיות גלובלית $Tot(C)$ של עקומה C.
   ג. הוכח שעקמומיות גלובלית של C שווה 2π.
   ד. לקבוע אם פונקצית עקמומיות של עקומה $2x^2 - 3y^2 = 0$ בנקודות $(x, y) \neq (0,0)$ היא קבועה, באמצעות אופרטור Bateman-Reiss .

2. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר על ידי גרף של $z = f(x, y)$ כאשר $f(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   א. מצא מטריצת Hessian H_f של f בראשית הצירים.
   ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1,2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x, y) השייך לערך עצמי λ_i . נגדיר מישור $P_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1,2$) הנפרש על ידי e_3 וגם הווקטור העצמי v_i. נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i = M \cap P_i$.
   מצא את העקמומיות של כל אחת מן העקומות γ_i בראשית הצירים.
   ג. חשב את העתקת Weingarten של M בראשית הצירים ואת עקמומיות Gauss של M בראשית הצירים.
   ד. חשב את עקמומיות ממוצעת של משטח M בראשית הצירים .

3. הביטויים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein . לבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ} , L_{ij} , וכו. ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:
   א. לבטא באמצעות Γ_{ij}^{ℓ} ו- L_{ij} ***בלבד***: $\langle x_{ab}, n_k \rangle \delta^a{}_c$.
   ב. $\langle x_j, x_{pq} \rangle \delta^j{}_r$.
   ג. $\langle x_{pqr}, x_m \rangle$.
   ד. $\delta^a{}_b g_{ca} g^{bd} \delta^c{}_d$

4. יהי $x(u^1, u^2)$ פרמטריזציה רגולרית של משטח במרחב $\mathbb{R}^3$.
   א. הגדר מושג של רגולריות של $x(u^1, u^2)$.
   ב. הוכח שהביטוי $\dfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^{\ell} x_\ell + L_{ij} n\right)$ הוא סימטרי באידקסים j- ו- k .
   ג. בטא את הביטוי $L_{i[j} L^k{}_{\ell]}$ במונחים של מקדמי המטריקה ונגזרותיה בלבד.

ד. תהי $\beta = x \circ \alpha$ עקומה על משטח. נניח שלכל $t > 0$, הוקטור $\beta''(t)$ הוא פרופורציונלי לוקטור $x_1 \times x_2$. מצא משוואה דיפרנציאלית מתקיימת על ידי הרכיבים $\alpha^k(t)$ של α.

5. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח קמור. תהי $G : M \to S^2$ העתקת Gauss השולחת כל נקודה של M לוקטור נורמל יחידה שלה. יהיו (θ, φ) קואורדנטות ספיריות על S^2. נניח $x = \theta \circ G, \quad y = \varphi \circ G$. יהיו (g_{ij}) מקדמים של המטריקה בקואורדינאטות אלו ותהי K עקמומיות Gauss של M.

א. חישבו את האינטגרל $\int_{x=0}^{x=2\pi} \int_{y=0}^{y=\pi} K(x,y)\sqrt{\det(g_{ij})}dxdy$ עם הוכחה.

ב. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $\frac{1}{(y-x)^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$ כאשר $x \neq y$.

בהצלחה!