הרצאה 6

· סכום לחיתוך תמ״ו, סכום ישר, Span

V מ״ו, $W_1, W_2 \le$

$$\begin{tikzcd}
 & W_1+W_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
W_1 \arrow[dr, dash] & & W_2 \arrow[dl, dash] \\
 & W_1 \cap W_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\left(\begin{array}{c} W_1, W_2 \le U \le V \Rightarrow \\ W_1 + W_2 \le U \end{array} \right)$$

$$\cdot \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{c} v_1, \dots, v_n \in B \\ \alpha_i \in \mathbb{F} \end{array} \right\}$$

$$\cdot \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(A \cup B) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(A) + \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B)$$

ראינו:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \underline{x} = u}_{\text{יש פתרון}} \iff u \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$$

בהינתן מ״ו V אומרים ש-B <u>פורשת</u> את V אם:

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B) = V$$

<u>דוגמה</u>:

$\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת, אך עודפת כי

<u>שני</u> וקטורים מתוכה פורשים.

הגדרה: יהי V מ"ו. נאמר כי הקב' $\{v_1,\dots,v_n\}$ **תלויה לינארית** (ת"ל) אם קיים $\underline{\alpha}$:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

לא טריוויאלי: לא כל ה-α_i-ים הם 0.

[בהמשך לדוגמה: $1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$ ולכן הקב' ת"ל.]

נאמר כי קבוצה היא **בת"ל** אם היא לא ת"ל.

דוגמה: ב-$\mathbb{F}^n$ נסתכל בקב':

$$\left\{\underset{e_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}},\underset{e_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}},\dots,\underset{e_n}{\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}}\right\}$$

בת"ל:

$$0=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}\Rightarrow$$

כל ה-α_i-ים הם אפס, ולכן כל $\underline{\alpha}$ שמאפס – טריוויאלי.

הערה: ① כל קבוצה המכילה את וקטור האפס היא ת"ל.

$1\cdot\vec{0}=\vec{0}$ = צ"ל לא טריוויאלי המאפס

② אם $v\neq 0$ אז הקב' $\{v\}$ בת"ל. הסבר:
כל צ"ל לא טריוויאלי הוא מהצורה αv עבור $\alpha\neq 0$,
ולכן אם $\alpha v=0 \Leftarrow V=\alpha^{-1}\alpha v=0$ סתירה.

<u>הגדרות משלימות:</u> אומרים שקב' אינסופית היא <u>ת"ל</u> אם יש לה תת-קב' סופית ת"ל.

אומרים שקב' אינסופית היא <u>בת"ל</u> אם כל תת-קב' סופית שלה-בת"ל.

<u>הערה:</u> אפשר לדבר על קבוצות שבהן יש איברים שחוזרים על עצמם:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \underline{\text{ת"ל}}$$

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u> $\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל $\iff$ $\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}\underline{x}=0$ יש פתרון לא-טריוויאלי.

$\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל $\iff$ למע' ההומ' אין פתרון לא טריוויאלי.

<u>תזכורת:</u> לכל מט', ל- $A\underline{x}=\underline{0}$ יש פתרון טריוויאלי: $\underline{x}=0$.
פתרון לא טריו' למע' ההומ' הוא כזה שלא כל הנעלמים אפסים.

<u>הוכחה:</u>

$\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל $\iff$ $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$
לא כל ה-α_i-ים שווים ל-0

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}}=\vec{0}$$

פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ'. מ.ש.ל.

<u>דוגמה:</u> האם הקב' $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל?

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&2\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\\0&-1&2\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{צורה מדורגת קא}}$$

אין משתנים חופשיים $\Leftarrow$ אין פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ'.

לכן, הקב' בת"ל.

טענה: יהיו m וקטורים במרחב $\mathbb{F}^n$. אם $m > n$ אז הם ת"ל.

הוכחה: נתבונן במט':

$$A = \begin{array}{c} \\ n\left\{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix}\right. \end{array}\underline{x} = 0 \qquad \overbrace{}^{m>n}$$

לה יש פתרון לא טריוויאלי למע' ההומוגנית.

נדרג את A. יש בצורה המדורגת לכל היותר n איברים מובילים, אבל $m>n$ עמודות, ולכן בהכרח משתנה חופשי, כלומר יש פתרון לא טריוויאלי למע' ההומ'.

מ.ש.ל.

הערה: ההפך אינו נכון: ייתכן ש- $m<n$, אך עדיין הווקטורים ת"ל:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{F}^3 \quad \text{ת"ל.}$$

משפט: $\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל $\iff$ אחד מהווקטורים הוא צ"ל של האחרים:

$\exists i: v_i \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

$$v_i \in Span_{\mathbb{F}}\underbrace{(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)}_{\{v_1,\dots,v_n\}\setminus\{v_i\}}$$

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח: $v_i \in Span_{\mathbb{F}}\{v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n\}$.

אזי:

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

לאיזשהם סקלרים. נעביר אגף:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + (-1)\cdot v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

זה לא טריוויאלי המתאפס. לכן, הקב' ת"ל.

($\Rightarrow$) נניח $\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל. צריך להראות שאחד מהוקטורים שייך ל- span של היתר.

יש תלות לינארית:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

כך שלא כל ה- α_i-ים אפסים.

נניח ש- $\alpha_j \neq 0$.

$$-\alpha_j v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1}v_{j-1} + \alpha_{j+1}v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}v_1 - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}v_{j+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}v_n$$

וקיבלנו: $v_j \in Span_{\mathbb{F}}\{v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n\}$. מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> אם $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל, אז יש לה תת-קבוצה <u>קטנה יותר</u>:

$S\setminus\{v_j\}$ כך ש-

$$Span_{\mathbb{F}}(S\setminus\{v_j\}) = Span_{\mathbb{F}}(S).$$

<u>הוכחה:</u> ברור $(\subseteq)$.

$(\supseteq)$ מהמשפט, ידוע כי $\exists j: \ v_j\in Span(S\setminus\{v_j\})$

ולכן:

$$Span(S) = Span(S\setminus\{v_j\}) + Span(\{v_j\}) \subseteq$$

$Span(A\cup B) = Span(A)+Span(B)$

$$\subseteq Span(S\setminus\{v_j\})$$

$$v_j = \sum_{i\neq j}\alpha_i v_i$$

$$\beta v_j = \sum_{i\neq j}\beta\alpha_i v_i \in Span(S\setminus\{v_j\})$$

מ.ש.ל.

<u>דוגמה:</u> $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ת"ל.

ואכן $Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = Span_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

<u>דוגמה:</u> נניח $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ פונקציות ממשיות כלשהן (פולינומים/ $\cos x$, ...)

$f_i(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

ונניח שלכל $1\le i\le n$ יש x_i:

$f_i(x_i)=1, \quad f_j(x_i)=0 \quad \forall j\neq i$.

נוכיח כי $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ בת״ל.

<u>פתרון:</u> בשלילה, הקב' ת״ל ולכן ניתן להביע אחד מהווקטורים כצירוף לינארי של היתר:

$$f_i(x) = \sum_{j\neq i} \alpha_j f_j(x)$$

אם זה נכון נציב $x=x_i$:

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{f_i(x_i)} = \sum_{j\neq i} \alpha_j f_j(x_i) = \sum_{j\neq i} \alpha_j \cdot 0 = 0$$

סתירה. לכן הקב' בת״ל.

<u>טענה:</u> תהא A מט' ריבועית $(n\times n)$. אזי:

A הפיכה $\iff$ $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ בת״ל $\iff$ $\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$ בת״ל.

<u>הוכחה:</u> $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ בת״ל $\iff$ אין פתרון לא טריוויאלי למשוואה:

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

אבל ראינו שהטענה הזאת שקולה (למט' ריבועית) לכך ש-A הפיכה.

A הפיכה $\iff$ A^T הפיכה $\overset{\text{ממה שהוכחנו הראשון}}{\iff}$ $\{C_1(A^T),\dots,C_n(A^T)\}$

$[C_1(A),\dots,C_n(A)]$ ...

בת״ל

$\Updownarrow$

$\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$

בת״ל.

מ.ש.ל.

<u>תרגיל לדוגמה:</u> $A\in\mathbb{F}^{3\times3}$. ידוע כי למע׳:

$A\underline{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ יש ∞ פתרונות.

הוכיחו כי שורות A ת״ל.

<u>פתרון:</u> לפי המשפט הנ״ל, שקול להראות כי A לא הפיכה. אבל ראינו שלמע׳ הפיכה יש למע׳ $A\underline{x}=\underline{b}$ פתרון יחיד, בסתירה לנתון. לכן A לא הפיכה, וסיימנו.

מ.ש.ל.

<u>טענה:</u> יהיו $v_1,\dots,v_n$ וקטורים שונים מ-0.

$\{v_1,\dots,v_n\}$ בת״ל $\iff$ הסכום:

$Span\{v_1\}\oplus\cdots\oplus Span\{v_n\}$ ישר.

<u>הוכחה:</u> $(\Longrightarrow)$ נניח בשלילה כי קיים צ״ל לא טריוו׳ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$.

יהי j האינדקס הגדול ביותר כך ש- $\alpha_j\neq0$. אזי מהגדרת אינדקס:

$(\alpha_{j+1}=\dots=\alpha_n=0)$

$$0\neq \alpha_j v_j=-\alpha_1v_1-\cdots-\alpha_{j-1}v_{j-1}$$

$$\{0\} \neq Span\{v_j\} \cap \left(Span\{v_1\}+\dots+Span\{v_{j-1}\}\right)$$

בסתירה לכך שהסכום ישר.

$(\Leftarrow)$ נניח בשלילה שהסכום אינו ישר. אז:

$$\{0\} \neq Span\{v_{k+1}\} \cap \underbrace{Span\{v_1,\dots,v_k\}}_{= Span\{v_1\}+\dots+Span\{v_k\}}$$

כלומר: יש $\alpha \neq 0$:

$$\alpha v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

נעביר אגף:

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k - \alpha v_{k+1} = 0$$

מכיוון ש-$\alpha \neq 0$, קיבלנו צ"ל לא טריוויאלי המתאפס, בסתירה לכך ש-$\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל.

מ.ש.ל.

$11^{\underline{0}0}$

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו. קבוצה $B \subseteq V$ היא <u>בסיס</u> אם B פורשת את V $(Span(B)=V)$ ו-B בת"ל.

<u>דוגמה:</u>

* $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$ פורשת, לא בת"ל.

* $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$ בת"ל, לא פורשת.

* $\left\{\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}},\dots,\underset{e_n}{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}\subseteq\mathbb{F}^n$ <u>בסיס</u>.

<u>הערה</u>: כל קב' בת"ל S היא בסיס עבור $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(S)$

<u>משפט</u> (יחידות ההצגה לפי בסיס):

B בסיס ל-V: $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ $\Longleftrightarrow$ לכל $v\in V$ יש הצגה <u>יחידה</u>: $v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח B בסיס ל-V. בפרט, $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B)=V$

ולכן לכל $v\in V$ יש הצגה:

$v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$

(כלומר: $v\in\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B)$.)

נניח בשלילה שההצגה אינה יחידה:

$v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_nu_n$

$v=\beta_1u_1+\dots+\beta_nu_n$

כך ש- $\alpha_i\neq\beta_i$ (לפחות לאחד $1\leq i\leq n$). ואז:

$$(\alpha_1-\beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n-\beta_n)u_n = 0$$

צרוף זה לא טריוויאלי המתאפס. סתירה לכך ש-B בת״ל.

($\Longrightarrow$) נניח את יחידות ההצגה ונוכיח כי B בסיס.

• B <u>פורשת</u>: לפי ההנחה, לכל $v\in V$ יש הצגה של v כצ״ל של וקטורי B. לכן: $v \in Span_{\mathbb{F}}(B)$.

כלומר: $V = Span_{\mathbb{F}}(B)$.

• B <u>בת״ל</u>: נניח בשלילה כי B ת״ל: קיים צ״ל:

$$\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n = 0$$

לא טריוויאלי. כלומר:

$$\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n = 0\cdot u_1 + \cdots + 0\cdot u_n$$

הצגנו את וקטור האפס בשתי דרכים שונות, בסתירה ליחידות ההצגה. לכן, B בת״ל.

מ.ש.ל.

<u>טענה</u>: תהא A מט׳ ריבועית $(n\times n)$. אזי:

A הפיכה $\Longleftrightarrow$ $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ בסיס $\Longleftrightarrow$ $\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$ בסיס. (ל-$\mathbb{F}^n$.)

<u>הוכחה:</u> ראינו כי:

A הפיכה $\iff$ $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ בת"ל $\iff$
$\{R_1(A),\dots,R_n(A)\}$ בת"ל.

לכן: $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ בסיס $\Rightarrow$ בת"ל $\Rightarrow$ A הפיכה

נותר להוכיח: אם A הפיכה אז $\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$ <u>בסיס</u>.
(לגבי השורות...)

ראינו כבר A הפיכה $\Rightarrow$ העמודות בת"ל. נותר להוכיח:

$$\operatorname{Span}\{C_1(A)\dots C_n(A)\} = \mathbb{F}^n$$

כלומר, צריך להראות שלכל $b \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון:

$$A\underline{x} = b$$

(כי ראינו ש- $u \in \operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_n\}$ אמ"מ $\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}\underline{x} = u$
יש פתרון.)

אבל אם A הפיכה, לפי משפט TFAE למט' ריבועיות, תמיד יש פתרון לכל $A\underline{x}=b$! סיימנו, כי הראינו שכל $b \in \mathbb{F}^n$ שייך ל- $\operatorname{Span}(B)$ כלומר B פורשת את $\mathbb{F}^n$.

לגבי שורות, הוכחה דומה בעזרת A^T.

מ.ש.ל.

מסקנה: ... $\mathbb{F}^n$ ...

[illegible]
אמ״מ בת״ל אמ״מ בסיס.

<u>הוכחה</u>: נסדר את וקטורי הקבוצה בשורות ונשתמש בלמה שהוכחנו.

בהמשך נראה הכללה חשובה של מסקנה זו שנקראת "השלישי חינם".

האם לכל מרחבים יש בסיס? לכולם.

אנחנו מדברים על מה "נוצרים סופית" - קיימת קבוצה סופית S כך ש- $V=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}} S$.

<u>הערה</u>: אומרים ש- $\emptyset$ היא בסיס למרחב $\{0\}$.

<u>הוכחה</u> עבור מרחבים נוצרים סופית:

באינדוקציה על $|S|=n$

<u>$n=0$</u>: $V=\mathrm{Span}\,\emptyset$ כלומר המרחב $\{0\}$, $\emptyset$ בסיס.

<u>$n=1$</u>: נתון כי $V=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}} S$ כאשר $S=\{v\}$.

$(V=0 \Leftarrow \emptyset$ היא בסיס$)$

$V\neq 0 \Leftarrow v\neq 0$ ולכן $\{v\}$ בסיס: $V=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{v\}$

<u>$n+1$</u>: $S=\{v_1,\dots,v_{n+1}\}$.

אם S בת״ל, סיימנו כי אז S פורשת את V + בת״ל $\Leftarrow$ בסיס.

נניח כי S ת״ל. לפי משפט שראינו, יש i:

$$v_i \in \mathrm{Span}\big(S\setminus\{v_i\}\big) \qquad (*)$$

קבוצה ב' n אברים

ולכן מהנחת האינדוקציה קיים בסיס ל- $Span(S\setminus\{v_i\})$.
נסמנו B. לכן:

(1) B בת"ל

(2) $Span(B) = Span(S\setminus\{v_i\})$.

נטען כי למעשה B בסיס ל- $V = Span(S)$. הרי:

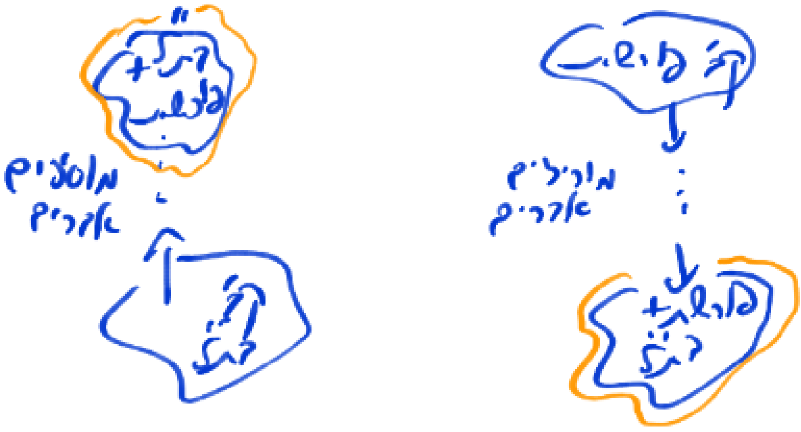
$$V = Span(S) = Span(S\setminus\{v_i\}) + \underbrace{Span\{v_i\}}_{\subseteq Span(S\setminus\{v_i\})\ (*)} =$$

$$= Span(S\setminus\{v_i\}) \overset{(2)}{=} Span(B)$$

קיבלנו כי B בת"ל + פורשת את V. לכן, B בסיס ל- V, כנדרש.

מ.ש.ל.

הערה: בסיס אפשר לבנות בשתי דרכים:



"BOTTOM UP"   "TOP DOWN"

טענה: כדי למצוא בסיס ל- $\text{Span}\{v_1,\dots,v_n\}$ מספיק לדרג את המט':

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

ולשלוף את הוקטורים המתאימים למשתנים התלויים.

הוכחה: נשלוף את העמודות המתאימות למשתנים התלויים:

$$A := \begin{bmatrix} | & & | \\ v_{i_1} & \cdots & v_{i_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

מס' העמודות (k) = מס' המשתנים התלויים $\leq$ מס' השורות.

לכן, לאחר דירוג A תתקבל:

נחזור לזה בהרצאה הבאה.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k = 0 \end{matrix}$$

הראינו כי אין פתרון לא טריוויאלי למע' ההומוגנית
לכן אין פתרון לא טריוויאלי ל- $A\underline{x}=0 \Leftarrow$ עמודותיה בת"ל. מ.ש.ל.

דוגמה: מצאו בסיס ל-

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: נעמיד כעמודות ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

זו צורה מדורגת. מי התלויים? x_1, x_2, x_3. לכן:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ בסיס ל- V.

אזהרה: זכרו לשלוף את העמודות המתאימות מהמטריצה המקורית ולא מהמט' לאחר הדירוג!

[איך נראים הבסיסים השונים של מ"ו?
ובכלל, האם ייתכן שלאותו מ"ו יש בסיסים בגדלים שונים?]

נראה בפעם הבאה.
