

פתרון תרגיל בית 2 במתמטיקה בדידה 2 83-118 סמסטר ב' תשע"ו

13 במרץ 2016

1. מצא כלל רקורסיבי לסדרה הבאה $1, 2, 2, 4, 8, 32, \dots$?

פיתרון:

בסיס: $a_0 = 1, a_1 = 2$

כלל: $\forall n > 1 : a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

2. באגם יש 5200 דגים, כל שנה אוכלוסיית הדגים דועכת ב 30% בגלל דיג אבל אז מוסיפים 400 דגים בשנה ממקורות חיצוניים. כתוב כלל רקורסיבי למספר הדגים בשנה ה- n . מה קורה לאוכלוסיית הדגים אחרי הרבה שנים (כלומר, כאשר $n \rightarrow \infty$) ?

פיתרון:

בסיס: $a_0 = 5200$

כלל: $\forall n > 0 : a_n = 0.7 \cdot a_{n-1} + 400$

נשים לב שעבור n גדול נקבל:

$$a_n = 0.7 \cdot a_{n-1} + 400 = 0.7(0.7 \cdot a_{n-2} + 400) + 400 = 0.7^2 \cdot a_{n-2} + (0.7 + 1) \cdot 400$$

לכן, רואים שהתוצאה תהיה $a_n = 0.7^n \cdot a_0 + 400 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0.7^k\right)$ ובאינדוקציה (כאשר הבסיס ברור), אם זה אכן נכון ל- n , אז עבור $n + 1$ נקבל:

$$a_{n+1} = 0.7 \cdot a_n + 400 = 0.7 \cdot \left(0.7^n \cdot a_0 + 400 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0.7^k\right)\right) + 400 = 0.7^{n+1} \cdot a_0 + 400 \cdot \left(\sum_{k=0}^n 0.7^k\right)$$

כאשר המעבר הראשון הוא הכלל הרקורסיבי. השני הוא הנחת האינדוקציה. השלישי הוא פתיחת סוגריים (כיוון שמכפילים את הסכום ב-0.7 נובע שהחזקה עולה, לכן במקום לרוץ מ-0 ל- $n-1$, רצים מ-1 ל- n . המעבר האחרון: כיוון שמוסיפים בסוף עוד 400 זה כמו להוסיף בסכום חזקת 0 כפול 400 (כי $a^0 = 1$ לכל a).

אם כן, התוצאה היא: $a_n = 0.7^n \cdot a_0 + 400 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0.7^k\right)$ נשאיף $n \rightarrow \infty$ ונשים לב שהחלק הראשון הוא אפס כי: $0.7^n \cdot a_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. החלק השני הוא הגבול של טור הנדסי, עם מנה 0.7. כלומר: $400 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0.7^k\right) = 400 \cdot \left(\frac{1}{1-0.7}\right) = 1333\frac{1}{3}$. אבל בגלל שאין כזה דבר שליש דג נקבל 1333.

3. סיסמת אבטחה לאתר מסויים דורשת את הכללים הבאים:
 א. הסיסמא תהיה בת 12 תווים - 8 אותיות אנגליות קטנות, ו-4 ספרות.
 ב. מותר חזרה על אותיות וספרות.
 כמה אפשרויות לסיסמאות יש? (רמז: התחילו בבחירת המיקום לספרות ולאותיות).

פיתרון:

כהדרכת הרמז, נבחר את המיקום של ארבעת הספרות בסיסמא, ובאופן אוטומטי ייקבע מיקום האותיות. בחירה זו ניתנת להיעשות ב- $\binom{12}{4}$ דרכים. כעת, לאחר שנקבע המיקום אנחנו צריכים לבחור 4 ספרות עם חזרה וחשיבות לסדר, שזה ניתן להיעשות ב- 10^4 אפשרויות, ובנוסף 8 אותיות עם חזרה וחשיבות לסדר, שזה ניתן להיעשות ב- 26^8 אפשרויות. בסה"כ מספר האפשרויות לסיסמא הוא:

$$\binom{12}{4} \cdot 10^4 \cdot 26^8$$

4. בכיתה 24 מהנדסי חשמל 12 מהנדסי מחשבים. בכמה אפשרויות ניתן לבחור ועד לכיתה, כאשר:
 א. הועד יכיל תשעה חברים - שישה מחשמל ושלושה ממחשבים.
 ב. צריך למנות ראש ועד מהנדסת חשמל, וסגן מהנדסת מחשבים

פיתרון:

ראשית נבחר את הראש וסגנו ב- $24 \cdot 12 = 288$ אפשרויות, ואז נותר לבחור 5 חברים מ-23 מהנדסי חשמל הנותרים ב- $\binom{23}{5}$, ושני חברים מ-11 מהנדסי מחשבים הנותרים ב- $\binom{11}{2}$ אפשרויות. סה"כ:

$$288 \cdot \binom{23}{5} \binom{11}{2}$$