83-116 מתממטיקה בדידה– תרגיל 6- פתרון

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

<u>תרגיל 1</u> ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח"ע, על או הפיכה (או כל השלושה!) אם הפונקציה הפיכה, ציינו את הפונקציה ההופכית שלה, והוכיחו שהיא ההופכית.

א. $f(n) = n + 1\ ,\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \backslash \{1\}$

הפונקציה ההפוכה: $g(n) = n - 1\ ,\ g: \mathbb{N} \backslash \{1\}\ \to\ \mathbb{N}$

(שימו לב שהיא מוגדרת היטב כי הוצאנו את 1)

נוכיח:

$$g \circ f(n) = g(n+1) = n + 1 - 1 = n$$
$$f \circ g(n) = f(n-1) = n - 1 + 1 = n$$

ב. $f(n) = |n|\ ,\ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

הפונק' היא על כי לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \in \mathbb{Z}$ ו-

$$f(n) = |n| = n$$

הפונק' לא חח"ע כי למשל $f(-1) = |-1| = 1 = f(1)$

ג. $f(x) = 2x^3 - 3\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

הפונקציה ההפוכה: $g(y) = \sqrt[3]{\frac{y+3}{2}}\ \ ,\ \ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

נוכיח:

$$g \circ f(x) = g(2x^3 - 3) = \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3 + 3}{2}} = \sqrt[3]{x^3}$$
$$= x$$

$$f \circ g(y) = f\left(\sqrt[3]{\frac{y+3}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{y+3}{2}}\right)^3 - 3$$
$$= 2\frac{y+3}{2} - 3 = y$$

ד. $f(x) = 10^{2-x}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

כאשר $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$

הפונקציה ההפוכה: $g(y) = 2 - \log_{10} y$ (שימו לב שזה אכן מוגדר...) נוכיח:

$$f \circ g(y) = f(2 - \log_{10} y) = 10^{2-(2-\log_{10} y)} = 10^{\log_{10} y} = y$$

$$g \circ f(x) = g(10^{2-x}) = 2 - \log_{10}(10^{2-x}) = 2 - (2 - x) = x$$

ה. תהי A קבוצה. $f: P(A) \to P(A)$, $f(B) = A \setminus B$

הפונקציה ההפוכה היא f בעצמה. נוכיח:

$$f \circ f(B) = f(A \setminus B) = A \setminus (A \setminus B) = B$$

(המעבר האחרון נכון כי $B \subseteq A$)

ו. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) =$ (מספר הגורמים השונים של המספר n)

הפונק' לא על: כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ניקח p מספר ראשוני אזי $f(p^{n-1}) = n$ כי המחלקים שלו הם $1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}$

הפונק' לא חח"ע כי למשל $f(3) = 2 = f(5)$

<u>תרגיל 2</u> תהי $f: X \to Y$ הוכח או הפרך:

א. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

הוכחה ע"י הכלה דו כיוונית:

<u>כיוון א'</u>:

$$y \in f(A \cup B) \Longrightarrow \exists\, x \in A \cup B : f(x) = y$$

כעת, $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B$ או $x \in A$

אם $x \in A$ אז $y = f(x) \in f(A)$

ואם $x \in B$ אז $y = f(x) \in f(B)$

ובכל מקרה: $y \in f(A) \cup f(B)$

<u>כיוון ב'</u>: ניקח $y \in f(A) \cup f(B)$ אזי

$y \in f(B)$ או $y \in f(A)$ בלי הגבלת הכלליות $y \in f(A)$

כלומר ש- $\exists\, x \in A : f(x) = y$

אבל $A \subseteq A \cup B$ ולכן $x \in A \cup B$ ולכן

$y = f(x) \in f(A \cup B)$

ב. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

דוגמא נגדית: $X = \{1,2,3\}, Y = \{1\}$ נגדיר את הפונקציה להיות הפונקציה הקבועה $\forall x \in X,\ \ f(x) = x$

ונבחר תתי קבוצות $A = \{1,2\}, B = \{3\}$

אזי:

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset \neq Y = \{1\} = \{1\} \cap \{1\} = f(A) \cap f(B)$$

<u>תרגיל 3</u> לכל פונקציה קבע אם היא חח"ע ומצא את קב' התמונות שלה.

א. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,,\ \ f(x) = 2x + 1$

חח"ע.
$x=y \Leftarrow 2x+1=2y+1 \Leftarrow f(x)=f(y)$
קב' התמונות: $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$
ב. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\,,\ f(x)=x^3-x$
לא חח"ע כי למשל $f(0)=0=f(1)$
קבוצת התמונות:
$f(\mathbb{Z})=\{n^3-n|n\in\mathbb{Z}\}$
(תשובה יותר יפה אבל לא הכרחית:
$\{(n-1)n(n+1)|n\in\mathbb{Z}\}$)

תרגיל 4

יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונקציות.

א. הוכיחו שאם: $g\circ f$ על, אז g על. מצאו f,g כך ש: $g\circ f$ על, אבל f לא על.

ב. הוכיחו שאם: $g\circ f$ חח"ע, אז f חח"ע. מצאו f,g כך ש: $g\circ f$ חח"ע, אבל g לא חח"ע.

ג. נניח ש: f,g שתיהן חח"ע ועל. הוכיחו ש: $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

ראיתם את כל ההוכחות בהרצאה.

שאלות 5+6 המקוריות לא רלוונטיות! אין צורך ללמוד אותן או שאלות בדומה להן.

<u>תרגיל 7</u> הוכח:

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = m^n .$$

$$m^n = (1+1+\cdots+1)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} 1^{k_1} \cdots 1^{k_m}$$

$$= \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m}$$

בהצלחה!