חבורות מסדר קטן

משפט

יש חבורה יחידה עד כדי איז' מסדר 3.

ז"א אם G, H שתי חב' מסדר 3, אז $G \cong H$

הוכחה

כדי להוכיח זאת "נתאר" את טבלת הכפל של של חבורה G. מסדרים את אברי G בסדר כלשהו $g_1, ...g_n$. הטבלה נראית כך:

*	g_1	...	g_i	...	g_n
g_1					
$\vdots$					
g_i			$g_i * g_i$		
$\vdots$					
g_n					

ז"א הטבלה היא מטריצה מסדר $|G| \times |G|$. איבר ij במטריצה הוא $g_i * g_j$.

הערה

החבורה אבלים אמ"ם המטריצה של טבלת הכפל סימטרית

עובדה

כל שורה במטריצה של טבלת הכפל היא תמורה של אברי G. (ז"א כל האברים מופיעים בכל שורה ואין אבר שמופיע פעמיים). כך גם עבור עמודות.

נתבונן בשורה i: $g_i * g_1, ...g_i * g_n$. יהי x אבר בG. $g_i * (g_i^{-1} * x) = x$ לכן x מופיע בשורה. אין אבר שמופיע פעמיים, אחרת יש $z \neq y$ בG כך ש$g_i * y = g_i * z \Leftrightarrow g_i^{-1} * g_i * y = g_i^{-1} * g_i * z \Leftrightarrow y = z$ - סתירה.

נחזור להוכחת המשפט

תהא G חבורה מסדר 3. G מכילה אבר יחידה e. בה"כ שמות שני האברים האחרים a, b. טבלת הכפל היא

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

. כדי להוכיח את המשפט, צ"ל שהאברים שברבוע נקראים באופן דטרמיניסטי(ז"א אין חופש בבחירה). נשלים את בריבוע בעזרת העובדה דלעיל:

$a * b \neq a$ (כי a כבר הופיע בשורה השניה)

$a * b \neq b$ (כי b כבר הופיע בשורה השניה)

לכן, בעל כורחנו $a * b = e$.

כדי שהשורה השניה תהיה תמורה, על כורחנו $a * a = b$. מכיוון שהעמודה השלישית היא תמורה, $b * b = a$. מכיוון שהשורה השלישית תמורה, $b * a = e$.

מסקנה

1. כל חב' מסדר 3 אבלית.
2. יתר על כן, כל חבורה מסדר 3 איז' ל$\mathbb{Z}_3$.

טענה

יש שתי חב' מסדר 4 שאינן איז'

הוכחה

תהא $G = \mathbb{Z}_4$. תהא H מ"ו ממימד 2 מעל $\mathbb{F}_2$ ־ שדה מסדר 2. נניח קיים איז' $\varphi : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{Z}_4$. מכיוון ש$e$ איז' יש מקור יחיד ל$1 \in \mathbb{Z}_4$. נסמנו (x, y). כלומר, $\varphi(x, y) = 1$. ואז

$$(x, y) + (x, y) = (x + x, y + x) = (0, 0)$$

ולכן (מכיוון שe שמורת פעולה)

$$\varphi(0, 0) = \varphi((x, y) + (x, y)) = \varphi(x, y) + \varphi(x, y) = 1 + 1 = 2$$

קיבלנו $\varphi(e_H) \neq e_G$ ־ סתירה לתכונת איז'.

תתי חבורות

הגדרה

תהא G חבורה עם פעולה $*$. תת־חבורה(ת"ח) של G היא תת־קבוצה $H \subseteq G$ לא ריקה שהיא חבורה ביחס לפעולה $*$. סימון: $G \leq G$

דוגמאות

1. לכל חבורה G יש שתי ת"ח:
   (א) $\{e\} \leq G$ ת"ח טריויאלית.
   (ב) $G \leq G$ (ג"כ נקראת ת"ח טריויאלית)
2. $\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Q}, +, 0) \leq (\mathbb{R}, +, 0) \leq (\mathbb{C}, +, 0)$
3. $(\{-1, 1\}, \cdot, 1) \leq \mathbb{Q}^* \leq \mathbb{R}^* \leq \mathbb{C}^*$
4. $\mathbb{Q}^* \not\leq \mathbb{Q}$ (למרות ש$\mathbb{Q}^*$ ת"ח של $\mathbb{Q}$) כי הפעולה שונה.
5. $\mathbb{Z}_n \not\leq \mathbb{Z}$ (מדוע?)
   אבל $(2\mathbb{Z}, +, 0) \leq \mathbb{Z}$ (כאשר $2\mathbb{Z}$ קבוצת הזוגיים) לכל m טבעי $m\mathbb{Z} = \{km : m \in \mathbb{Z}\}$ ת"ח של $\mathbb{Z}$.

קריטריונים לכך שת"ק היא ת"ח

טענה 1

תאה G חבורה. $H \leq G$ ת"ק לא ריקה של G. $H \leq G$ אמ"ם

1. H סגורה תחת כפל. כלומר $\forall a,b \in H \, ab \in H$
2. H סגורה תחת הופכי. כלומר לכל $a \in H$, $a^{-1} \in H$.

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח H ת"ח אז H מקיימת אקס. חבורה בפרט את (1) ו(2).

$\Rightarrow$ נניח H ת"ק לא ריקה של G שמקיימת (1) ו(2). אז H ת"ח.

צ"ל, H מקיימת אקס. חבורה. H סגורה תחת כפל לפי (1). כפל בH אסוצ' כי כל שלושה $a,b,c \in H$ של איברים בH היא שלשה של איברים בG ולכן מקיימת $(ab)\,c = a\,(bc)$.

קיום יחידה, כי H לא ריקה לכן קיים אבר $a \in H$. לפי (2) גם $a^{-1} \in H$. לפי (1) $aa^{-1} \in H$ אבל $aa^{-1} = e$.

ולבסוף, קיום הפכי נתון לפי (2)

טענה 2

תהא G חב'. $\emptyset \notin H \subseteq G$. $H \leq G$ אמ"ם (א): $\forall a,b \in H \, ab^{-1} \in H$

הוכחה

$\Leftarrow$(כיוון קל) אם H ת"ח של G אז לכל $b \in H$, $b^{-1} \in H$, ולכן לכל $a,b \in H$ $a,b^{-1} \in H$ ולכן $ab^{-1} \in H$.

$\Rightarrow$ נניח H ת"ק לא ריקה של G שמקיימת (א). צ"ל H ת"ח. צ"ל, H מקיימת אקס. חבורה.

כפל בH אסוצ., כי כל שלשה $a,b,c \in H$ של איברים בH היא שלשה של איברים בG ולכן מקיימת $(ab)\,c = a\,(bc)$

H לא ריקה, ולכן קיים אבר $a \in H$. לפי (א) מתקיים $aa^{-1} \in H$.(לוקחים $b = a$) מכאן $e \in H$. כלומר, קיימת יחידה בH.

קיום הופכי: לכל $x \in H$, ניקח $a = e$ הוא איבר בH כדלעיל. $b = x$)x איבר בH לכן $b \in H$). $ab^{-1} = ex^{-1} = x^{-1} \in H$. מכאן לכל איבר ב$H$ יש הופכי בH.

לבסוף, נותר להראות סגירות תחת כפל. צ"ל: לכל $x,y \in H$, $xy \in H$. לכל $x,y \in H$ מתקיים $x,y^{-1} \in H$(כי קיים הפכי בH כדלעיל). ב(א), נבחר $a = x, b = y^{-1}$. לפי (א) מתקיים $xy = x\left(y^{-1}\right)^{-1} = ab^{-1} \in H$

מסקנות

1. $m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ עבור m טבעי(השלם פרטים).
2. $SL_n\left(\mathbb{F}\right) \leq GL_n\left(\mathbb{F}\right)$. הוכחה:$SL_n\left(\mathbb{F}\right)$ סגורה תחת כפל והפכי(מדוע?)
3. עוד ת"ח לא טריוויאליות של $CL_n\left(\mathbb{R}\right)$:

(א) $D_n(\mathbb{R})$ - קב' המטריצות האלכסוניות ב$GL_n(\mathbb{R})$ סגורה תחת כפל והפכי לכן $D_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$

הגדרה

$B_n(\mathbb{R})$קבוצת המטריצות המשולשיות עליונות ב$GL_n(\mathbb{R})$

עובדה

$xsuru, B_n(\mathbb{R})$תחת כפל והפכי. לכן $B_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$(נקראת ת"ח בורל).

עוד דוגמה

מטריצות סקלריות: $\{cI_n, c\in\mathbb{F}^*\} \leq GL_n(\mathbb{F})$

מרכז של חבורה

הגדרה

תהא G חבורה כלשהי. המרכז של G, סימון: $Z(G)$, היא ת"ק של האברים $x\in G$ המקיימים $\forall g\in G\, gx=xg$. כלומר, $Z(G):=\{x\in G:\forall g\in G\, gx=xg\}$

דוגמאות

1. אם G אבלית אז $Z(G)=G$. יתר על כן, $Z(G)=G$ אמ"מ G אבלית.
   הוכחה: אם G אבלית, ודאי לכל $x\in G$ ו$g\in G$ מתקיים $xg=gx$, ולפיכך, אם $Z(G)=G$ אז לכל איבר $x\in Z(G)=G$ מתקיים לכל $g\in G$ $xg=gx$. מכאן, כל זוג $x,g\in G$ מתחלף.
2. $Z(GL_n(\mathbb{R}))=\{cI:c\in\mathbb{R}^*\}$
3. תרגיל: $Z(S_n)=\{e\}$.

טענה

תהא G חב'. אז $Z(G)\leq G$

הוכחה

לכל $g\in G$ $eg=ge$ ולכן $e\in Z(G)$. מכאן $\emptyset\neq Z(G)\subseteq G$. לכן, מ"ל $Z(G)$ סגורה תחת כפל והפכי.

נוכיח כעת $Z\left(G\right)$ סגורה תחת כפל. יהיו $a,b\in Z\left(G\right)$. מתקיים $\begin{matrix}ag=ga\\ bg=gb\end{matrix}$ $\forall g\in G$. על כן, לכל $g\in G$

$$\left(ab\right)g=a\left(bg\right)=a\left(gb\right)=\left(ag\right)b=\left(ga\right)b=g\left(ab\right)$$

נראה סגירות תחת הפכי. יהא $a\in Z\left(G\right)$ מתקיים $\forall g\in G\,ag=ga$. נכפיל מימין ומשמאל בa^{-1}:

$$\Leftrightarrow\forall g\in G\,a^{-1}\left(ag\right)a^{-1}=a^{-1}\left(ga\right)a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\forall g\in G\,\left(a^{-1}a\right)\left(aa^{-1}\right)=\left(a^{-1}g\right)\left(aa^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\forall g\in G\,ga^{-1}=a^{-1}g$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}\in Z\left(G\right)$$

חזרה לת"ח

טענה

תהא G חבורה. $H\le G$ וגם $K\le G$. אזי $K\cap H\le G$.

הערה

אם $H\le G$, אם e_H יחידה של H, אזי e_H יחידה של G.

הוכחת ההערה

מ"ל יהא x,y איברים בG כך ש$xy=y$ אז $x=e$, שכן $xy=y\Leftrightarrow xyy^{-1}=yy^{-1}\Leftrightarrow x=e$. מכאן, $H\le G$ לכן קיים $a\in H$ ו$e_H\in H$(ל"ד שונים) ומתקיים $e_Ha=a$. מש"ל הערה.

הוכחת הטענה

H ת"ח, לכן יש בה יחידה e_H. לפי ההערה זוהי היחידה של G, $e_H=e_G$. בדומה, K ת"ח, לכן יש בה יחידה e_K שהיא גם היחדיה של G, כלומר $e_K=e_G$. מכאן $e_G\in H\cap K$ ובפרט $H\cap K$ אינה ריקה.

נותר להראות $K\cap H$ סגורה תחת כפל והפכי. אכן לכל $a\in K\cap H$ $a\in K$ ולכן $a^{-1}\in K$(כי K ת"ח) וגם $a\in H$ ולכן $a^{-1}\in H$(כי H ת"ח). קיבלנו לכל $a\in K\cap H$, $a^{-1}\in K\cap H$.

בדומה עבור כפל $\forall a,b\in K\cap H$: $a,b\in K\Leftarrow$ $ab\in K$ (כי K ת"ח). $a,b\in H\Leftarrow$ $ab\in H$ (כי H ת"ח). ועל כן $ab\in K\cap H$($\forall a,b\in K\cap H$).

טענה

תהיינה ... $H^1, H^2, \ldots$ סדרה(ל"ד אינסופית) של ת"ח של G. אז $\bigcap_{i=1}^{\infty} H^i \leq G$. תרגיל: הוכח

יתר על כן

תהא $\{H^\alpha\}_{\alpha \in A}$קבוצה של ת"ח של G. A - קב' אינדקסים(ל"ד סופית). אז $\bigcap_{a \in A} H^\alpha \leq G$