u.math.biu.ac.il/~kantor/sev75.pdf

כלל השרשרת

משפט

1. תהי f פונקציה <u>ממשית</u> המוגדרת בסביבה $B\left(x^0,r\right)$ של הנק. x^0 ב$\mathbb{R}^k$ <u>ודיפרנציאבילית</u> בנק. x_0.

2. תהי x מוגדרת בסביבה $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ של הנקודה t_0 ב$\mathbb{R}$ עם ערכים ב$\mathbb{R}^k$, עם טווח $B\left(x^0,r\right)$ ו$x\left(t_0\right)=x^0$. נניח ש$x'\left(t_0\right)$ גזירה וקיימת $x'\left(t_0\right)=\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$. אזי $f\circ x$ ($\left(f\circ x\right)(t)=f\left(x(t)\right)$) גזירה בנק. t_0, ו$\left(f\circ x\right)'\left(t_0\right)=df|_{x^0}\,x'\left(t_0\right)$.

במפורש: $$\left(f\circ x\right)'\left(t_0\right)=x'\left(t_0\right)\nabla f|_{x^0}=\sum_{i=1}^{k}\frac{df}{dx_i}\frac{dx_i}{dt}\left(t_0\right)$$

הוכחה

לפי הנחה 1: $f\left(x^0+h\right)-f\left(x^0\right)=df|_{x^0}h+\varphi(h)$ ו$\varphi h=o\left(\|h\|\right)$, כלומר $\frac{\varphi(h)}{\|h\|}\xrightarrow[h\to 0]{}$

0. ז"א אם $\epsilon>0$ נתון, קיים $0<\eta<r$ כך שאם $\|h\|<\eta$ אזי $\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|}<\epsilon$ ($|\varphi(h)|<\epsilon\left(|h|\right)$). ניקח $h_t\doteqdot x(t)-x\left(t_0\right)$. כיוון ש$x'$ קיים בנק' t_0, x רציף בנק' t_0 ולכן $x(t)-x\left(t_0\right)\to 0$, לכן קיים $0<\delta_1<\delta$ כך שאם $|t-t_0|<\delta_1$, אזי $\|x(t)-x\left(t_0\right)\|<\eta$ ולכן $|\varphi\left(h_t\right)|<\epsilon\|h_t\|$ כאשר $|t-t_0|<\delta_1$.
$t\neq t_0$, $|t-t_0|<\delta_1$:

$$0\le\left|\frac{\varphi\left(h_t\right)}{t-t_0}\right|<\epsilon\frac{\|h_t\|}{|t-t_0|}=\epsilon\|\frac{h_t}{t-t_0}\|=\epsilon\|\frac{x(t)-x\left(t_0\right)}{t-t_0}\|$$

(לפי ההגדרה ולפי רציפות הנורמה על $\mathbb{R}^k$)

$$0\le\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\varphi\left(h_t\right)}{t-t_0}\right|\le\epsilon\|x'\left(t_0\right)\|$$

ולכן הגבול

$$\boxed{\exists\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi\left(h_t\right)}{t-t_0}=0}$$

$$x^0+h_t=x\left(t_0\right)+h_t=x(t)$$

$$\frac{f\left(x(t)\right)-f\left(x\left(t_0\right)\right)}{t-t_0}=\frac{f\left(x^0+h_t\right)-f\left(x^0\right)}{t-t_0}=df|_x\left(\frac{x(t)-x\left(t_0\right)}{t-t_0}\right)+\frac{\varphi\left(h_t\right)}{t-t_0}(***)$$

כיוון ש$df|_x$ הוא פ"ל(פונקציונאל לינארי).
כאשר $t \to t_0$

$$\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \to x'(t_0)$$

$df|_x$ פ"ל ולכן הוא רציף(ראינו שכל פונקציונאל לינארי על $\mathbb{R}^k$ הוא פונקציה רציפה על $\mathbb{R}^k$). לכן המחובר הראשון ב*** שואף ל$df|_{x_0} x'(t_0)$. המחובר השני שואף ל

$$\exists \lim_{t\to t_0} \frac{f(x(t))-f(x(t_0))}{t-t_0} = df|_{x_0} x'(t_0)$$

הכללה למקרה שx הינה פונ'(וקטורית) של l משתנים.

משפט

1. תהי f פונ' ממשית המוגדרת בסביבה $B\left(x^0,r\right)$ של הנק. x^0 ב$\mathbb{R}^k$ ודיפר-נציאבילית בנק. x^0.
2. $x():\mathbb{R}^l \Rightarrow \mathbb{R}^k$ מוגדרת בסביבה של הנק. u^0 ב$\mathbb{R}^l$ עם ערכים ב$B\left(x^0,r\right)$.
נניח $\frac{dx}{du_i}\left(u^0\right)$ ו$x()$ רציפה בנק. u^0. <u>אזי</u> $\left.\frac{d(f\circ x)}{du_i}\right|_{u^0}$ קיימים $\forall i=1,...k$,

והנוסחה הבאה נכונה:

$$\left.\frac{d(f\circ x)}{du_i}\right|_{u^0} = df|_{x^0} \left.\frac{dx}{du_i}\right|_{u^0} = \nabla f|_{x^0} \left.\frac{dx}{du_i}\right|_{u^0} = \sum_{j=1}^{k} \left.\frac{df}{dx_j}\right|_{x_0} \left.\frac{dx_j}{du_i}\right| u^0$$

$$\nabla_u (f\circ x)|_{u^0} = \nabla_x f|_{x^0} \left.\left(\frac{dx}{du}\right)\right|_{u^0}$$

המטריצה של <u>היעקוביאן</u>: $\left(\frac{dx}{du}\right) = \left(\frac{d(x_1,...x_k)}{d(u_1,...u_k)}\right)$

הערה

אם $k=l$ נוהגים לקרוא לדטרמיננטה של המטריצה $\left(\frac{dx}{du}\right)$ <u>היעקוביאן</u> של x לפי u.

דוגמה חישובית

$$\mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \Rightarrow \mathbb{R}$$

Ŀ

$$f\left(x,y\right)=\log\left(x^2+y^2\right)$$

Ŀ

$$x\left(\right):\left(r,\varphi\right):\left(0,\infty\right)\times\left[0,2\pi\right)\to\mathbb{R}^2$$

Ŀ

$$x\left(r,\varphi\right)=\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi\right)$$

Ŀ

$$\left(f\circ x\right)\left(r,\varphi\right)=f\left(x\left(r,\varphi\right)\right)=\log\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)=\boxed{2\log r}$$

Ŀ

$$\begin{cases}\dfrac{d\left(f\circ x\right)}{dr}=\dfrac{2}{r}\\ \dfrac{d\left(f\circ x\right)}{d\varphi}=0\end{cases}$$

חישוב לפי כלל השרשרת:

.1 $$\frac{d\left(f\circ x\right)}{dr}=\left.\frac{df}{dx}\right|\frac{dx}{dr}+\left.\frac{df}{dy}\right|\frac{dy}{dr}$$ Ŀ

.2 $$\frac{d\left(f\circ x\right)}{d\varphi}=\left.\frac{df}{dx}\right|\frac{dx}{dy}+\left.\frac{df}{dy}\right|\frac{dy}{d\varphi}$$ Ŀ

.1 $$\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|\cos\varphi+\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|\sin\varphi$$ Ŀ

.2 $$\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|\left(-r\sin\varphi\right)+\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|r\cos\varphi=\frac{-2r\cos\varphi\sin\varphi+2r\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}=$$ Ŀ

$$0$$