תזכורת וגמר הוכחה

משפט

יהי Z מרחב מטרי קומפקטי. אזי $C(Z)$ הוא מרחב בנך(דהיינו מרחב נורמי שלם)

גמר ההוכחה(של השלמות)

$\epsilon > 0$. $\{f_n\}$ סדרת קושי ב$C(Z)$. קיים $n(\epsilon)$ טבעי כך ש$\|f_n - f_m\| < \epsilon$ כאשר $m > n > n(\epsilon)$

$$\forall m > n > n$$

$$(*) \quad \forall_x \left(|f_n(x) - f_m(x)| \le\right) \|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{3}$$

כלומר $\{f_n(x)\}$ סדרת קושי ב$\mathbb{R}$ ⇐ שלמות $\mathbb{R}$ גוררת $(*) \doteqdot f_n(x) \lim_{n\to\infty} \exists$

עבור $n > n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$ כלשהו, נשלח $m \to \infty$ ב$(*)$

$$(**) \quad \forall_{x\in Z}, \forall_{n>n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\epsilon}{3}$$

f רציפה על Z

f הוא גבול של f_n ב$C(Z)$. ניקח $\sup$ ב$(**)$

$$\forall_{n>n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)} \|f_n - f\| \left(\doteqdot \sup_{x\in Z} |f_n(x) - f(x)|\right) \le \frac{\epsilon}{3} (< \epsilon)$$

ז"א $f_n \to f$ במרחב המטרי $C(Z)$.

התבוננות בהוכחה מראה שהמשפט נכון.
גם כאשר הפונקציהות מקבלות ערכים במרחב נורמי שלם(דהיינו מרחב בנך) כלשהו Y(במקורה ב$\mathbb{R}$)

סימון

נסמן ב$C(Z,Y)$ את המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הרציפות $f : Z \to Y$ (Y מרחב בנך כלשהו!). נגדיר את הנורמה על $C(Z,Y)$ ע"י

$$\|f\| = \sup_{x\in Z} \|f(x)\| (< \infty)$$

(זה יוצר ערך סופי כי Z קומפקטי)

משפט(מוכל)

יהיו Z מרחב מטרי קומפקטי, Y מרחב בנך. אזי $C\left(Z,Y\right)$ הוא מרחב בנך.

הערה

אם V מרחב מטרי שלם וF קבוצה סגורה בV, אזי גם F מרחב מטרי שלם(לגבי אותה מטריקה).

כי: אם $\{x_n\}$ ס"ק בF, הרי היא היא גם ס"ק בV, וכיוון שV שלם, $\exists \lim x_n = v \in V$.

[v הוא נק' גבול של F(או שייכת לF) (כי כל סביבה של v מכילה אין סוף נקודות של F x_n החל מn גדול מספיק, או $v = x_n$ עבור n גדול מספיק) מכל מקום $v \in F$, כי F סגורה.]

תוצאה

- Z=מרחב מטרי קומפקטי
- Y=מרחב בנך
- b=מספר חיובי כלשהו

לכל $b > 0$, הכדור הסגור $C_b\left(Z,Y\right) = \{f \in C\left(Z,Y\right) | \|f\| \le b\}$ הוא מרחב מטרי שלם.

$$F : D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F\left(x^{\in\mathbb{R}^k}, y^{\in\mathbb{R}}\right) = 0$$

רוצים לפתור "מקומית" עבור y כפונקציה של x

באופן כללי יותר: מערכת משוואות $F_j\left(x_1, ...x_k; y_1, ...y_s\right) = 0$ ממשיות.(s משוואות בs נעלמים)

באופן שקול

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$$

רוצים "לפתור" מקומית $F\left(x,y\right) = 0$ עבור y כפונ' של x(כאשר $x, y, 0$ ווקטורים)

תנאי ליפשיץ

תהי $F : \Omega \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$. נאמר ש$F$ מקיימת את תנאי ליפשיץ בy(בΩ) אם קיים $q > 0$ כך ש$\|F\left(x,y\right) - F\left(x,y'\right)\| \le q\left\|y - y'\right\|$ לכל $\left(x,y\right), \left(x,y'\right)$ בΩ

(הנורמות הן הנורמות האוקלידיות ב$\mathbb{R}^s$)

מס' q כנ"ל נקרא קבוע של ליפשיץ עבור F

משפט עזר 1

נסמן $(a,b>0) D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s \middle| \begin{array}{c}|x_i|<a, i=1,...k\\ \|y\|\le b\end{array}\right\}\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^s$

תהי $f:D\to\mathbb{R}^s$ רציפה ומקיימת את תנאי ליפשיץ ב-y עם קבוע ליפשיץ $q<1$.
נניח $f(0,0)=0$. אזי קיים $0<a'<a$ כך שלמשוואה $\boxed{f(x,y)=y}$ יש פתרון יחיד $y\in\mathbb{R}^s$ עם $\|y\|\le b$.

לכל x בתא הסגור $I\doteqdot\left\{x\in\mathbb{R}^k \middle| |x_i|\le a\right\}$ הפתרון מגדיר פונקציה $y=\varphi(x)$ שהיא רציפה ב-I ו-$\varphi(0)=0$.

הוכחה

$$D_0=\left\{x\in\mathbb{R}^k \middle| |x_i|<a\right\}\subset\mathbb{R}^k$$

(תא פתוח)

$$f_0:D_0\to\mathbb{R}^s$$

מוגדרת ע"י

$$f_0(x)\doteqdot f\left(\underbrace{x,0}_{\in D}\right)\forall x\in D_0$$

f_0 רציפה על D_0 (כי f_0 היא צמצום של הפונקציה הרציפה f לתחום החלקי $D_0\subset D$)

$$f_0(0)=f(0,0)=0$$

לפי הגדרת הרציפות, אם $\epsilon>0$ נתון כלשהו, קיים $\delta>0$ כך ש

$$\|f_0(x)\|=\|f_0(x)-f_0(0)\|<\epsilon$$

לכל $x\in D_0$ שעבורו $\|x\|=\|x-0\|<\delta$ נבחר $\boxed{\epsilon=(1-q)b}$ ונקבל δ מתאים.

נגדיר $0<a'<\min\left[a,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right]$. יהי I כמו בניסוח המשפט (עם a') הזה. I מרחב מטרי קומפקטי (כי הוא תא סגור ב-$\mathbb{R}^k$)

$X\doteqdot C_b(I,\mathbb{R}^s)$ מרחב מטרי שלם (לצורה הפעלת משפט נקודת השבת של בנך)

$$\psi\in X\doteqdot C_b(I,\mathbb{R}^s)$$

$$\forall_{x\in I}\|\psi(x)\|\le\sup_{z\in I}\|\psi(z)\|\doteqdot\|\psi\|\le b$$

($\|\psi\| \leq b$ כי $\psi \in X$)
ולכן ($f(x,\psi(x))$= $f\circ\tilde{\psi}$) מוגדר היטב ורציף על I

$$x,x'\in I \quad \|(x,\psi(x))-(x',\psi(x'))\|^2=\sum(x_i-x_i')^2+\sum(\psi_i(x)-\psi_i(x'))^2 \xrightarrow[x'\to x]{} 0$$

$\tilde{\psi}:I\to D$ <u>רציפה</u> וf רציפה מD ל$\mathbb{R}^s$ לכן $\tilde{\psi}$ <u>רציפה על I</u>.

$$\forall x\in I$$

$$\left\|\left(f\circ\tilde{\psi}\right)(x)\right\|=\|f(x,\psi(x))\|=\|[f(x,\psi(x))-f(x,0)]+f(x,0)\|$$

$$\leq \|f(x,\psi(x))-f(x,0)\|+\|f_0(x)\|$$

ובגלל תנאי ליפשיץ

$$\leq q\|\psi(x)-0\|+\|f_0(x)\|<b\,(\leq b)$$

ניקח סופרימום על כל הxים בI

$$\left\|f\circ\tilde{\psi}\right\|\leq b$$

כלומר

$$\boxed{f\circ\tilde{\psi}\in C_b(I,\mathbb{R}^s)}$$

נגדיר כעת את ההעתקה המבוקשת

$$T:C_b(I,\mathbb{R}^s)\to C_b(I,\mathbb{R}^s)\to C_b(I,\mathbb{R}^s)$$

$$\boxed{T\psi=f\circ\tilde{\psi}}$$

במפורש: $(T\psi)(x)=f(x,\psi(x))\,\forall x\in I$
נבדוק שT היא <u>כיווץ</u> של המרחב המטרי השלם ($X \doteqdot C_b(I,\mathbb{R}^s)$):

$$\|(T\psi-T\psi')(x)\|=\|(T\psi)(x)-(T\psi')(x)\|=\|f(x,\psi(x))-f(x,\psi'(x))\|$$

ובגלל תנאי ליפשיץ

$$\leq q\|\psi(x)-\psi'(x)\|\leq q\|\psi-\psi'\|$$

לפי משפט נקודת השבת של בנך, קיימת נקודת שבת יחידה φ ב($X \doteqdot C_b(I,\mathbb{R}^s)$ עבור T, ז"א

$$T\varphi=\varphi$$

$$\forall_{x\in I} f(x,\varphi(x))=\varphi(x)$$

ז"א $y=\varphi(x)$ היא פתרון של המשוואה $f(x,y)=y$ עם $\|y\|\leq b$ לכל $x\in I$