תזכורת

סוגי השגיאות שיכולים להיות בחישובים נומריים:

- שגיאת עיגול - יש מספר ספרות גדול יותר ממה שאפשר לשמור.
- שגיאת קירוב
- שגיאה מתפשטת

סימון השגיאה - Δf. זה בעצם חסם של השגיאה.

שגיאה מתפשטת

$$y^* = f\left(x^*\right)$$

טענה

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x$$

הוכחה

כאשר Δx קטן:

$$\Delta f = \frac{\left|f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)\right| \cdot \Delta x}{\left(x+\Delta x\right) - x} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x$$

כאשר יש לנו פונקציה במספר משתנים:

$$y = f\left(x_1, x_2, ...x_n\right)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$$

שגיאה יחסית

$$\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i}{|y|}$$

תרגיל

$$y = 3x_1 - 5x_2^2 + x_3^2$$

חשב את השגיאה כאשר

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.05 \qquad \Delta x_1 = 0.1 \\ x_2 &= 0.33 \qquad \Delta x_2 = 0.1 \\ x_3 &= 1.12 \qquad \Delta x_3 = 0.1 \end{aligned}$$

פתרון

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -10x_2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_3} = 2x_3$$

$$\Delta y \leq 3 \cdot 0.1 + 3.3 \cdot 0.1 + 2.24 \cdot 0.1$$

תרגיל

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$R = 5.3 \qquad \Delta R = 0.05$$

$$\pi^* = 3.14 \qquad \pi = 3.14159...$$

פתרון

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 4\pi R^2$$

אמנם π הוא קבוע מתמטי, אבל אנחנו לא יכולים לייצג אותו באופן מדוייק במחשב - כלומר יש בייצוג שלו שגיאה. ברגע שאנחנו לא יכולים לייצג ערך כלשהו באופן מוחלט - הוא אוטומטית הופך למשתנה (לפחות בחישוב הזה). לכן צריך גם לחשב את

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{4R^3}{3}$$

לכן

$$\Delta V = \left|4 \cdot 3.14 \cdot 5.3^2\right| 0.05 + \left|\frac{4 \cdot 5.3^3}{3}\right| |\pi - 3.14| = 17.96$$

פעולות חשבון על שגיאה מתפשטת

$$\Delta (x+y) = |1| \cdot \Delta x + |1| \cdot \Delta y = \Delta x + \Delta y$$

$$\Delta (x-y) = |1| \cdot \Delta x + |-1| \Delta x = \Delta x + \Delta y$$

$$\Delta (x \cdot y) = |y| \Delta x + |x| \Delta y$$

$$\Delta \left(\frac{x}{y}\right) = \left|\frac{1}{y}\right| \Delta x + \left|\frac{x}{y^2}\right| \Delta y$$

$$\delta (x \cdot y) = \frac{\Delta (x \cdot y)}{|x \cdot y|} = \left|\frac{|y| \Delta x + |x| \Delta y}{|x| |y|}\right| = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} = \delta x + \delta y$$

$$\delta \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Delta \left(\frac{x}{y}\right)}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \left|\frac{\left|\frac{1}{y}\right| \Delta x + \left|\frac{x}{y^2}\right| \Delta y}{\frac{x}{y}}\right| = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} = \delta x + \delta y$$

חסם השגיאה הכללי

חסם השגיאה עבור חישוב מסויים הוא סכום שלושת סוגי השגיאות:

$$\Delta f = |\mathrm{round}| + |\mathrm{approx}| + |\mathrm{spread}|$$

מספר מצב(Condition Number)

מספר מצב הוא מדד שאומר כמה הפונקציה הרגישה לשינויים במקום מסויים.

הגדרה

מספר המצב הוא היחס בין השגיאה היחסית בפלט לשגיאה היחסית בקלט:

$$C=\left|\frac{\delta y}{\delta x}\right|$$

$$C=\left|\frac{\delta y}{\delta x}\right|=\left|\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}\right|=\left|\frac{\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\cdot x}{y}\right|=\left|\frac{\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\cdot x}{y}\right|=\left|\frac{y'\cdot x}{y}\right|$$

- $C\gg 1$ - ill condition - מצב לא רצוי שבו שינוי קטן יכול להוביל לשגיאה גדולה.
- $C\approx 1$ - well-condition - מצב טוב, שבו הפונקציה לא מזדעזעת מכל שינוי קטן.

דוגמה

$$f_1\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}\qquad f_2\left(x\right)=\frac{\left(3x^4-10\right)^2}{12}$$

במידה ואנו יכולים לבחור בין שתי הפונקציות לחשב עבור $\sqrt{2}$, איזו פונקציה נעדיף?

תשובה

נבדוק את מספרי המצב של הפונקציות:

$$f_1'\left(x\right)=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\qquad f_2'\left(x\right)=\frac{2\left(3x^2-10\right)\cdot \cancel{12}x^3}{\cancel{12}}=2y^3\left(3y^2-10\right)$$

$$C_1=\left|\frac{f_1'\left(x\right)\cdot x}{\delta\left(x\right)}\right|=\left|\frac{\frac{\delta x}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}}}\cdot x}{\frac{1}{\cancel{x^2+1}}}\right|=\frac{\delta x\cdot x}{\left(x^2+1\right)},C_1\left(x\right)=\frac{3}{4}$$

מחשבים גם את C_2, ורואים ש$C_1>C_2$

תרגיל

$$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$$

$$x_0=2$$

$$x_1=1.1$$

$$x_2=1.01$$

$$x_3=1.0001$$

חשב את מספרי המצב

פתרון

$$C=\left|\frac{\frac{1}{\left(1-x\right)^{\cancel{2}}}\cdot x}{\cancel{\frac{1}{1-x}}}\right|=\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

$$C_{x_0}=2$$

$$C_{x_1}=\frac{1.1}{0.1}=11$$

$$C_{x_2}=\frac{1.01}{0.01}=101$$

$$C_{x_3}=\frac{1.0001}{0.0001}=10001$$

זה קורה בגלל שב$x=1$ הפונקציה לא מוגדרת, ולכן מקבלים שם אסימפטותה.

שגיאה של פונקציה במספר משתנים

הגדרה - נורמה

מסמנים נורמה בתור $\|x\|$. פונקציית הנורמה צריכה לקיים 3 דרישות:

- $\|x\| \geq 0$, ו $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|c \cdot x\| = |c| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

הגדרה

- נורמת t - $\|x\|_t = \sqrt[t]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^t}$
- נורמה אוקלידית - $\|x\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$
- נורמת מנהטן - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

עבור מטריצות

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

דוגמה

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.59 \\ 3.78 \\ 5.67 \\ 0.16 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 3.8 \\ 5.7 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

נחשב את השגיאה היחסית בנורמה 1:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.03 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\delta x = \frac{\|\Delta \vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_1} = \frac{0.1}{11.2} \approx 8.93 \cdot 10^{-3}$$

תרגיל

$$f\left(x\right)=x^{3}+3x-4$$

רוצים לחשב נגזרת:

$$x=2.0001$$

$$x^{*}=2$$

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(h\right)}{h}\qquad h>0$$

מה השגיאות שיהיו בחישוב הזה?

פתרון

- שגיאת קלט:

$$x^{*}=x+\Delta x$$

$$f\left(x^{*}\right)=f\left(x+\Delta x\right)=3\left(x+\Delta x\right)^{2}+3=$$

$$=3\left(x^{2}+2x\Delta x+\Delta x^{2}\right)+3\approx3x^{2}+6x\Delta x_{3}$$

$$f'\left(x^{\alpha}\right)-f'\left(x\right)=\cancel{3x^{2}}+6x\Delta x+\cancel{3}-\cancel{-3x^{2}}-3=6x\Delta x=6\cdot2.0\cdot0.0001=1.2\cdot10^{-3}$$

- שגיאת קירוב:

$$\delta'\left(x\right)^{*}=\frac{\left(x+h\right)^{3}+3\left(x+h\right)-4-\left(x^{3}+3x-4\right)}{h}=\frac{3x^{2}\cancel{h}+3xh^{\cancel{2}}+h^{\cancelto{2}{3}}+e^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=$$

$$=3x^{2}+3xh+h^{2}+3$$

$$f'\left(x\right)=3x^{2}+3$$

$$\Delta f'\left(x\right)=\left|3xh+h^{2}\right|=\left|6h+h^{2}\right|$$

$$\left|\frac{\Delta f'\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\right|\approx\left|\frac{\Delta f'\left(x\right)}{f'\left(x\right)^{*}}\right|\leq\frac{1}{2}B^{1-p}=2^{-23}$$

$$\Rightarrow |\Delta f'(x)| \le \left|f'(x)^*\right| \cdot 2^{-23}$$

$$= 2^{-23}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$$

$$\le 2^{-23}\frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h} \approx 2^{-23}\cdot\frac{2|f(x)|}{h} = \frac{2^{-22}}{h}\left|x^3+3x-4\right|$$

$$\left|\frac{x-x^*}{x}\right| \approx \left|\frac{x-x*}{x^*}\right|$$

נתונה פונקציה $y(x_1,x_2,...x_n)$.

הערכים המדוייקים: $x_1,x_2,...x_n \to x_1^{(0)},x_2^{(0)},...x_n^{(0)}$

הערכים המקורבים: $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...\tilde{x}_n$

נרצה לחשב את השגיאה.

נסמן:

$$\underline{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1,...\tilde{x}_n)$$

$$\underline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)},...x_n^{(0)}\right)$$

$$\underline{x}_i = \left(\tilde{x}_1,...\tilde{x}_i,x_{i+1}^{(0)},...x_n^{(0)}\right), \qquad i=1,...n-1$$

$$\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i^{(0)}$$

$$\Delta y = y(\underline{\tilde{x}}) - y\left(\underline{x}^{(0)}\right)$$

מעבר בין $\underline{x}_{i-1} \rightarrow \underline{x}_i$:

$$y(x_i) - y(x_{i-1}) = \frac{\partial y}{\partial x_i}\left(\underline{\xi}_i\right)\left(\tilde{x}_i - x_i^{(0)}\right)$$

$$\xi_i \in \left(\underline{x}_{i-1},\underline{x}_i\right) \approx \frac{\partial y}{\partial x_i}(\underline{\tilde{x}})\,\Delta x_i$$

$$\Delta y = y(x_n) - y(x_0) = \sum_{i=1}^{n} y(x_i) - y(x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}(\underline{\tilde{x}})\cdot\Delta x_i$$