שיעורי בית 5

.

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1 e_2. הוכיחו:

   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]

   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.

   (ג) נגדיר את הגרעין של ϕ להיות $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$. הוכיחו כי הגרעין הוא תת־חבורה של G_1

   (ד) נגדיר את התמונה של ϕ להיות$Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in G_1\}$. הוכיחו כי התמונה היא תת־חבורה של G_2.

2. הגדרה: ההמופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

   (א) מצאו הומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3

   (ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

   (א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

   (ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

   $$\Phi : G \to Aut(G)$$

   ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר : $\forall g \in G$ $I_x(g) = xgx^{-1}$.
   הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$.(לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין

(ב) : $\phi : (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a+ib) = a^2+b^2$.(לדוגמה: $\phi(1+2i) = 5$) ,הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

(ג) ההומורפיזים $\phi : S_n \to \{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = sign(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

5. תהא G חבורה, H תת חבורה. קוסט שמאלי של H הוא קבוצה מהצורה $gH = \{gh| \, h \in H\}$ עבור $g \in G$ כלשהוא (באופן דומה, קוסט ימני של H הוא קבוצה מהצורה $Hg = \{hg| \, h \in H\}$).

(א) הוכיחו כי

$$[g_1 H = g_2 H] \iff \left[g_2^{-1} g_1 \in H\right] \iff [\exists h \in H : g_1 = g_2 h]$$

לכל $g_1, g_2 \in G$.

(ב) נגדיר יחס $\equiv$ על G כך: לכל $g_1, g_2 \in G$

$$[g_1 \equiv g_2] \iff [g_1 H = g_2 H]$$

הוכיחו כי זהו יחס שקילות (כלומר, הוכיחו כי יחס סדר רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

(ג) עבור $g \in G$ נגדיר את מחלקת השקילות של g להיות $[g]_{\equiv} = \{g' \in G| \, g \equiv g'\}$. הוכיחו כי $[g]_{\equiv} = gH$.

(ד) את אוסף מחלקות השקילות מסמנים כ $G/H = \{gH| \, g \in G\}$. הוכיחו כי אם G סופית אזי $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$. (הדרכה: הוכיחו כי כל מחלקות השקילות מאותו גודל).

(ה) תהא G חבורה סופית . H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

.6

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכיחו כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.
כלומר הקבוצות $K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$ בעלות עוצמה שווה.
(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : \; gH = Hg$$