

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 2

1 בנובמבר 2018

1. רשמו את המספרים הבאים בצורה קרטזית $z = a + bi$:

א. $5\text{cis}135^\circ$

ב. $\text{cis}\frac{\pi}{3}$

פתרון:

א. $z = 5 \cos 135 + 5 \sin 135 \cdot i = -2.5\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2}i$

ב. $z = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot i = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. רשמו את המספרים הבאים בצורה פולרית $z = r\text{cis}\theta$:

א. $-5i$

ב. $2 - 2i$

ג. 17.5

פתרון:

א. זהו מספר מדומה טהור, ולכן הוא נמצא על הציר המדומה (ציר ה- y) בחלקו התחתון. לכן מרחקו מהראשית הוא 5, והזווית עם הכיוון החיובי של הציר הממשי (ציר ה- x) היא $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$. בסה"כ נקבל $z = 5\text{cis}\frac{3\pi}{2}$

ב. נחשב את הנורמה: $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. והזווית: $\tan \theta = \frac{-2}{2} = -1$ והזווית: $\theta = 315 = 135^\circ$. כיון שהמספר נמצא ברביע הרביעי נקבל $\theta = 315 = \frac{7\pi}{8}$. בסה"כ: $z = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{8}$

ג. זהו מספר ממשי, ולכן נמצא על הצירה הממשי (ציר ה- x). לכן מרחקו מהראשית הוא 17.5, והזווית היא 0. בסה"כ: $z = 17.5\text{cis}0$

3. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^3 = 6\text{cis}\frac{\pi}{5}$

ב. $(\bar{z})^4 = 2 + i$

ג. $z^3 \cdot (1 + i) = 2$

פתרון:

א. לפי המסקנה ממשפט דה-מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[3]{6}\text{cis}\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \{0, 1, 2\}$$

כלומר, $z_0 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{\pi}{15}$, $z_1 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{11\pi}{15}$, $z_2 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{7\pi}{5}$

ב. נצימד את שני הצדדים: $(\bar{z})^4 = 2 - i$, ואז לפי כללי הצמוד נקבל:

$$z^4 = 2 - i = \sqrt{5}\text{cis}333.435$$

קעת נפעיל את דה־מואבר לקבל: $z_0 = \sqrt[8]{5}\text{cis}83.359, z_1 = \sqrt[8]{5}\text{cis}173.359, z_2 = \sqrt[8]{5}\text{cis}263.359, z_3 = \sqrt[8]{5}\text{cis}353.359$

ג. גם כאן צריך קצת משחק עד שרואים משוואה שאותה אנחנו יודעים לפתור עם דה־מואבר: $z^3 \cdot (1+i) = 2 \Rightarrow z^3 = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i}{2} = 1-i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.
 ועכשיו לפי דה־מואבר נקבל: $z_0 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{12}, z_1 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{13\pi}{12}, z_2 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{23\pi}{12}$.

4. א. מצאו שני שורשי יחידה שונים מסדר 5, z, w , כך ש- $z \cdot w = 1$.
 ב. מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 7, z, w, q , כך ש- $z \cdot w \cdot q = 1$.

פתרון:

א. כזכור, שורשי היחידה מסדר 5 הם המספרים: $\text{cis}\frac{2\pi k}{5}, k \in \{0, \dots, 4\}$. ניקח $k_1 = 2, k_2 = 3$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi \cdot 2}{5} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 3}{5} = \text{cis}\left(\frac{2\pi \cdot 2}{5} + \frac{2\pi \cdot 3}{5}\right) = \text{cis}\frac{2\pi \cdot 5}{5} = \text{cis}2\pi = \text{cis}0 = 1$$

כאשר בשיויון הראשון השתמשנו במשפט דה־מואבר.

ב. באותו רעיון שורשי היחידה מסדר 7 הם $\text{cis}\frac{2\pi k}{7}, k \in \{0, \dots, 6\}$. ניקח $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi \cdot 1}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 2}{7} \cdot \text{cis}\frac{2\pi \cdot 4}{7} = \text{cis}\left(\frac{2\pi \cdot (1+2+4)}{7}\right) = \text{cis}2\pi = 1$$

5. הוכיחו: אם n זוגי אז מכפלת שורשי היחידה מסדר n היא -1 : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = -1$, ואם n אי זוגי אז המכפלה היא 1 : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1$. כאשר $z_k = \text{cis}\frac{2\pi k}{n}$.

פתרון:

נשים לב:

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} \text{cis}\frac{2\pi k}{n} = \text{cis}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\pi k}{n}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k\right)$$

קעת קיבלנו סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שבה הוא אפס, ולכן ניתן להתעלם ממנו. כלומר, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. לכן נקבל:

$$\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = \text{cis}((n-1)\pi)$$

עכשיו הגיע הזמן לחלק בין הזוגיים לאי־זוגיים. אם n אי זוגי אז $n-1$ זוגי, ומספר זוגי של π זה בדיוק כמו זווית האפס (להזכירכם, כל פעמיים π זה סיבוב אחד וחוזרים שוב להתחלה), ולכן נקבל $\text{cis}0 = 1$. אם n זוגי אז $n-1$ אי זוגי ואז זה בדיוק כמו זווית $\pi = 180^\circ$ (כלומר, חצי סיבוב), ולכן נקבל $\text{cis}\pi = -1$.

בהצלחה!