תרגיל 1 - σ־אלגבראות ומשתנים מקריים- תשע"ט

7 במרץ 2019

1. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. הוכח/ הפרך: $\mathcal{F}^c$ סיגמא־אלגברה. ($\mathcal{F}^c$ המשלים של $\mathcal{F}$ ב־ $P(\Omega)$).

2. תהי $A \subseteq \Omega$ תת קבוצה במרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
נגדיר $\Gamma = \{B \,|\, B \cap A = A \; or \; B \cap A = \emptyset\}$. הוכח כי Γ הוא σ־אלגברה.

3. תהי $\Omega \neq \emptyset$. ויהי $E \neq \emptyset$ אוסף כלשהו של תתי קבוצות מ־ Ω. נסמן ב־ B את אוסף כל הסיגמא־אלגבראות של Ω המכילות את E.

   (א) יהי $P(\Omega)$ אוסף כל תתי הקבוצות של Ω. הוכיחו כי $P(\Omega)$ היא סיגמא־אלגברה. הסיקו כי $B \neq \emptyset$.

   (ב) נגדיר $A_E = \bigcap\limits_{A \in B} A$הוכח כי A_E היא סיגמא־ אלגברה.

   (ג) הוכיחו כי A_E היא הסיגמא אלגברה המינימלית המכילה את E.

4. תהי $A \subseteq P(X)$ סיגמא אלגברה על X. תהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה.

   (א) קבעו האם $\{B \in A \,|\, B \subseteq Y\}$ ו־ $\{B \cap Y \,|\, B \in A\}$ הן סיגמא אלגבראות.
   כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף כי $Y \in A$.

   (ב) יהי $(\Omega, A, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות. ותהי $B \in A$ כך ש: $P(B) > 0$.
   נגדיר $(B, A_B, \mathbb{P}_{\mathbb{B}})$ באופן הבא: $A_B = \{C \cap B \,|\, C \in A\}$ ולכל קבוצה $D \in A_B$ נגדיר $P_B(C) = P(C)/P(B)$
   הוכח: $(B, A_B, \mathbb{P}_{\mathbb{B}})$ מרחב הסתברות.

5. יהי X משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_x(t) = \begin{cases} 2 * t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ c & t \in (1, 2] \\ 0 & else \end{cases}$$

   (א) מצאו את c.

   (ב) חשבו את $\mathbb{P}(\frac{1}{3} < t < \frac{3}{4})$.

   (ג) חשבו את התוחלת של X.

6. יהיו $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות. נגדיר את X להיות משתנה מקרי פשוט המוגדר ע"י סדרת המאורעות הללו.
הוכח: $\mathbb{E}[X] = \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{P}(A_k)$.

7. יהיו X ו־Y משתנים מקריים בלתי תלויים. נתבונן בפונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידות בורל. הוכח:
$f(X)$, $g(Y)$ בלתי תלויים.

8. יהי X משתנה מקרי, $a \in \mathbb{R}$. הוכח: $\mathbb{E}(max\{X, a\}) \geq max\{\mathbb{E}(X), a\}$.