התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 3:אינטגרל פורייה

1.מינוח (הולדר 1859-1937)

הגדרה 1.1:

תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע (a,b), $-\infty \le a < b \le \infty$ נאמר שהפונקציה $f(x)$ מקיימת בנקודה $x \in (a,b)$ את *תנאי הולדר* מסדר $\alpha_1 \in (0,1]$ (מסדר $\alpha_2 \in (0,1]$) מימין (משמאל), אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\exists \lim\limits_{t \to +0} f(x+t) := f(x+0)$ $\left(\exists \lim\limits_{t \to +0} f(x-t) := f(x-0)\right)$

2. קיים קבוע $M_1 \in (0,\infty)$ $\left(M_2 \in (0,\infty)\right)$ כך שעבור כל $t>0$ מספיק קטן

מתקיים האי שוויון:

$$\left|f(x+t)-f(x+0)\right| \le M_1 t^{\alpha_1} \quad \left(\left|f(x-t)-f(x-0)\right| \le M_2 t^{\alpha_2}\right)$$

הערה 1.2:

תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע (a,b), $-\infty \le a < b \le \infty$ נאמר שהפונקציה בעלת נגזרת $f'_+(x)$ מימין ($f'_-(x)$ משמאל) בנקודה $x \in (a,b)$, אם:

1. $\exists \lim\limits_{t \to +0} f(x+t) := f(x+0)$ $\left(\exists \lim\limits_{t \to +0} f(x-t) := f(x-0)\right)$

.2 $\exists \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} := f'_+(x_0)$ $\left(\lim\limits_{t\to+0}\left[-\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]=f'_-(x_0)\right)$

ברור שאם $\exists f'_+(x)$ $\left(\exists f'_-(x)\right)$, אז הפונקציה $f(x)$ מקיימת בנקודה x את תנאי הולדר מכל סדר $\alpha\in(0,1]$ מימין (משמאל) וכן, אם לדוגמא, $\exists f'_+(x)$

אז

$$\Rightarrow \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^\alpha} \le \left|f'_+(x)\right|t^{1-\alpha}+\left|\varepsilon(t)\right|t^{1-\alpha}\le\left[\alpha\le 1\right]\le$$

$$\max\left\{\left|f'_+(x)\right|,1\right\}=M<\infty$$

דוגמא לפונקציה שלא מקיימת את תנאי הולדר:

נשים לב קודם כל ש $\lim\limits_{x\to+0} x^x=1$. כי:

$$\lim_{x\to+0} x^x=\lim_{x\to+0}\left(e^{\ln x}\right)^x=\lim_{x\to+0} e^{x\ln x}=\left[e^z\text{- continuous function}\right]=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x}=\left[\lim_{x\to+0} x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=[Lopital]=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\right.$$

$$\left.=-\lim_{x\to+0} x=0\right]=e^0=1$$

תהי $y(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln|x|}, & x\ne 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y(x)=0$ נראה כי בנקודה x הפונקציה $y(x)$

לא מקיימת את תנאי הולדר. נניח בשלילה $\Leftarrow$ $\exists M>0$ ו $\alpha\in(0,1]$ כך ש:

$$\left|y(0\pm t)-y(0)\right|\le Mt^{\alpha} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\ln|t|}-0\right|\le M|t|^{\alpha} \Rightarrow$$

$$0<\frac{1}{M}\le |t|^{\alpha}\ln|t|=\frac{1}{\alpha}|t|^{\alpha}\ln|t|^{\alpha}=\left[|t|^{\alpha}:=x,\ \ t\to 0 \Rightarrow x\to 0\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}|x|\ln|x|=\frac{1}{\alpha}\ln|x|^{|x|}=\left[t\to 0 \Rightarrow |x|^{|x|}\to 1\right]\to 0$$

עבור $t\to 0$. סתירה.

הגדרה 1.3:

נזכר במינוח של ההרצאות הקודמות, נאמר ש $f\in L_1(R)$ אם $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, $b-a<\infty$ לפי רימן וקיים האינטגרל הלא אמיתי $\|f\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$.

2.תנאי לפיתוח פונקציה לאינטגרל פורייה (פורייה ג'ון בפטיסט, 1768-1830)

הגדרה 2.1:

תהי $f(t)\in L_1(R)$. נסמן $F(\sigma)$: $F(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\sigma t}dt$ התמרת הפורייה של $f(t)$. אם בנקודה $t=x$ קיים הגבול:

$$\varphi(x)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma t}F(\sigma)d\sigma=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma \quad (2.1)$$

אז נקרא לגבול הפונקציה $f(t)$ בנקודה x - *פיתוח לאינטגרל פורייה*.

הטענה הבאה היא התוצאה העיקרית של הקורס שלנו בתחום $L_1(R)$.

משפט 2.2:

תהי הפונקציה $f\in L_1(R)$ ובנוסף התנאים הבאים מתקיימים:

1. הפונקציה $f(t)$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר $\alpha_1\in(0,1]$ מצד ימין בנקודה הנתונה x.
2. הפונקציה $f(t)$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר $\alpha_2\in(0,1]$ מצד שמאל בנקודה הנתונה x.

(המספרים $0<\alpha_1,\alpha_2\le 1$ שרירותיים). אז מתקיים השוויון:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma t}F(\sigma)d\sigma=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\quad(2.2)$$

וגם

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\quad(2.2)$$

שני האינטגרלים הם לפי מובן הערך העיקרי.

הערה 2.3: אם בנקודה x הפונקציה $f(x)$ רציפה, אז $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

הוכחה (9 עמודים): נקבע $\lambda\in(0,\infty)$ ונתבונן באינטגרל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma t}F(\sigma)d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma\quad(2.3)$$

ראשית כל: האינטגרל בצד שמאל של המשוואה קיים, לפי משפט רימן-לבג (הרצאה 2) הפונקציה $F(\sigma)$ רציפה ב$[-\lambda,\lambda]$ $\forall\lambda>0$ (וחסומה בכל הציר) ולכן תחת האינטגרל אצלנו הפונקציה רציפה. בחלק הימני של (2.3) – זה פשוט החלק השמאלי של (2.2). מטרתנו כעת היא לשנות את הסדר האינטגרציה ב(2.3). נסתמך על הטענה הבאה:

משפט 2.4 (ארצלה, הרצאה 1, עמוד 10):

תהי נתונה פונקציה $\varphi(t,\sigma)$ על המלבן $t\in[a,b],\ \sigma\in[c,d]$ כאשר $b-a<\infty,\ \ d-c<\infty$. אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $\varphi(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי t ב$[a,b]$ עבור כל $\sigma\in[c,d]$
2. הפונקציה $\varphi(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי σ ב$[c,d]$ עבור כל $t\in[a,b]$
3. $\sup\limits_{\substack{t\in[-m,n]\\ \sigma\in[-\lambda,\lambda]}}|\varphi(t,\sigma)|\le L<\infty$ (הפונקציה $\varphi(t,\sigma)$ חסומה בהחלט במישור $[a,b]\times[c,d]$).

אז קיימים שני האינטגרלים *המחוזררים*:

$$\int_c^d\left(\int_a^b\varphi(t,\sigma)dt\right)d\sigma,\ \ \int_a^b\left(\int_c^d\varphi(t,\sigma)d\sigma\right)dt$$

והם שווים אחד לשני.

יהי $\varepsilon>0$. יהיו $n>>1,m>>1$ מספרים, נבחר אותם אחר כך.

מתקיים לפי (2.3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-m}^{n}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt+\int_{-\infty}^{-m}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt+\int_{n}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-m}^{n}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma+\eta_{n,m}=$$

$$\eta_{n,m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{-m}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt+\int_{n}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma$$

נתבונן בפונקציה:

נבדוק שהפונקציה הנתונה $\varphi(t,\sigma)=e^{i\sigma(t-x)}f(t), \quad \sigma\in[-\lambda,\lambda], \quad t\in[-m,n]$ מקיימת את כל התנאים 1-3 של משפט 2.4 (ארצלה):

1. $\varphi(t,\sigma)=e^{i\sigma(t-x)}f(t)$ אינטגרבילית לפי t (במובן של רימן) ב$[-m,n]$ עבור $\forall n>>1,m>>1$, כיוון ש $f\in L_1(R)$ לכל $\sigma\in[-\lambda,\lambda]$ קבועה.

2. $\varphi(t,\sigma)=e^{i\sigma(t-x)}f(t)$ אינטגרבילית לפי σ ב$[-m,n]$ לכל $t\in[-m,n]$ קבוע, באותו אופן.

3. $\sup\limits_{\substack{t\in[-m,n]\\ \sigma\in[-\lambda,\lambda]}}|\varphi(t,\sigma)|=\frac{1}{2\pi}\sup\limits_{t\in[-m,n]}|f(t)|=l(m,n)<\infty$ כיוון שאם הפונקציה $f(t)$ אינטגרבילית בקטע הסופי $[-m,n]$ במובן של רימן, אז היא בהכרח חסומה בהחלט.

$$\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-m}^{n}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-m}^{n}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma(t-x)}f(t)d\sigma\right]dt$$

ונקבל שוויון (לפי משפט 2.4):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma-\eta_{n,m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-m}^{n}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma(t-x)}f(t)d\sigma\right]dt \quad (2.4)$$

כיוון ש $f\in L_1(R)$ אז ניתן לבחור m,n גדולים מספיק כך ש:

$$\left|\eta_{n,m}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{-m}\underbrace{\left|e^{i\sigma(t-x)}\right|}_{=1}\left|f(t)\right|dt\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{n}^{\infty}\underbrace{\left|e^{i\sigma(t-x)}\right|}_{=1}\left|f(t)\right|dt\right]d\sigma \le$$

$$\le\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{-m}\left|f(t)\right|dt+\frac{\lambda}{\pi}\int_{n}^{\infty}\left|f(t)\right|dt\le\frac{2\lambda}{\pi}\int_{|t|\ge\min(n,m)}\left|f(t)\right|dt\Rightarrow\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\eta_{n,m}=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_{-m}^{n}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma(t-x)}f(t)d\sigma\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma(t-x)}f(t)d\sigma\right]dt \quad (2.5)$$

המעבר האחרון הוא לפי ההגדרה של אינטגרל לא מסוים.

נדגיש כי האינטגרל בצד ימין של (2.5) קיים, כיוון שהאינטגרל משמאל קיים. אם כך:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\sigma(t-x)}d\sigma\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_{-\lambda}^{\lambda}\underbrace{\cos\sigma(t-x)}_{1}d\sigma+i\int_{-\lambda}^{\lambda}\underbrace{\sin\sigma(t-x)}_{2}d\sigma\right]dt$$

הפונקציה הראשונה זוגית לפי σ, והשנייה אי זוגית לפי σ, לכן האינטגרל השני שווה ל0 והראשון מחושב להלן:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda}\cos\sigma(t-x)d\sigma=2\int_{0}^{\lambda}\cos\sigma(t-x)d\sigma=2\frac{\sin\sigma(t-x)}{t-x}=2\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}t-x:=\xi\\ t=x+\xi\end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+\xi)\frac{\sin\sigma\xi}{\xi}d\xi\Rightarrow$$

וכן נקבל את השוויון העיקרי המקורי:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ix\sigma}F(\sigma)d\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt,\ \lambda>0 \quad (2.6)$$

כאן $F(\sigma)$ - התמרת הפורייה של הפונקציה $f(\cdot)$. נזכיר (מהרצאה 1 עמוד 13-18) כי מתקיים השוויון (אינטגרל דריכלה):

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \quad (2.7)$$

תהי $\lambda>0$ כפי שנראה לעיל. אז מ(2.7) נובע:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\begin{bmatrix}\lambda t=x\\ t=\frac{x}{\lambda}\end{bmatrix}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{\frac{x}{\lambda}}\frac{dx}{\lambda}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

באופן דומה

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\begin{bmatrix}\lambda t=-x\\ t=\frac{-x}{\lambda}\end{bmatrix}=\int_{0}^{\infty}\frac{(-1)\sin x}{\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}(-1)\frac{dx}{\lambda}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$\Leftarrow$ ניתן להשתמש בזוגיות של הפונקציות תחת האינטגרל.

$$\Leftarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \forall \lambda > 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+0) \cdot \frac{\sin \lambda t}{t} dt \\ \frac{f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x-0) \cdot \frac{\sin \lambda t}{t} dt \end{aligned}\right\} \forall \lambda > 0 \quad (2.8)$$

מ(2.6) ו (2.8) נובע:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ix\sigma} F(\sigma) d\sigma - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+0) \cdot \frac{\sin \lambda t}{t} dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+0) \cdot \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} f(x-0) \cdot \frac{\sin \lambda t}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[f(x+t) - f(x+0) \right] \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \left[f(x+t) - f(x-0) \right] \frac{\sin \lambda t}{t} dt \quad (2.9)$$

כיוון שהפונקציה $f(\cdot)$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר α_1 מימין ומסדר מסדר α_2 משמאל בנקודה x , אז קיימים קבועים $M_1, M_2 \in (0,\infty)$ כך ש

$$\left| f(x+t) - f(x+0) \right| \le M_1 t^{\alpha_1}, \ t > 0, \ |t| \ll 1$$

$$\left| f(x+t) - f(x-0) \right| \le M_2 |t|^{\alpha_2}, \ t < 0, \ |t| \ll 1$$

יהיו $(\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ $\ \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}, \ M = \max\{M_1, M_2\},$ אזי
נמצא $0 < \delta \ll 1$ כך ש

$$\left.\begin{aligned} \left| f(x+t) - f(x+0) \right| &\le M t^{\alpha}, \ |t| < \delta, \ t > 0 \\ \left| f(x+t) - f(x-0) \right| &\le M |t|^{\alpha}, \ |t| < \delta, \ t < 0 \end{aligned}\right\} (2.10)$$

כעת בעזרת (2.10) נרשום את (2.9) באופן הבא:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ix\sigma}F(\sigma)d\sigma-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\left[f(x+t)-f(x-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left[f(x+t)-f(x-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}dt:=$$

$$J_1(\delta)+J_2(\delta)+J_3(\delta)+J_4(\delta)+J_5(\delta)\quad(2.11)$$

יהי $\varepsilon>0$ ותהי δ מספיק קטנה כך ש: $\delta^{\alpha}<\frac{\pi\varepsilon\alpha}{4M}$ אזי:

$$\left|J_1(\delta)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\underbrace{f(x+t)-f(x+0)}_{Holder}\right|\frac{dt}{t} \le$$

$$\frac{M}{\pi}\int_0^{\delta}\left|t\right|^{\alpha-1}dt = \frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}$$

$$\left|J_2(\delta)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left[f(x+t)-f(x-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left|\underbrace{f(x+t)-f(x-0)}_{Holder}\right|\frac{dt}{\left|t\right|}$$

$$\le \frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}\left|t\right|^{\alpha-1}dt = \frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}$$

ז"א, לפי בחירת δ מתקיים:

$$\left|J_1(\delta)+J_2(\delta)\right| \le \left|J_1(\delta)\right| + \left|J_2(\delta)\right| \le \frac{2M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

להערכת $J_3(\delta)$:

$$J_3(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_{\left|t\right|\ge\delta} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

נגדיר פונקציה $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{f(x+t)}{t} & ,\left|t\right| \ge \delta \\ 0 & ,\left|t\right| < 0 \end{cases}$ ברור ש $g(t) \in L_1(R)$, כיוון ש

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt=\underbrace{\int_{|t|\le\delta}|g(t)|dt}_{=0}+\int_{|t|\ge\delta}|g(t)|dt=\left[if\quad |t|\ge\delta\Rightarrow|g(t)|=\frac{1}{\pi}\frac{|f(x+t)|}{|t|}\right.$$

$$\left.\le\frac{1}{\pi\delta}|f(x+t)|\right]\le\frac{1}{\pi\delta}\int_{|t|\ge\delta}f(x+t)dt\le\frac{1}{\pi\delta}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)dt=\frac{\|f\|_1}{\pi\delta}<\infty$$

אז לפי למרת רימן (הרצאה 2 עמוד 1)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin\lambda t dt=0\Rightarrow$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}\frac{f(x+t)}{t}\sin\lambda t dt=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin\lambda t dt=0$$

הביטוי האחרון אומר שעבור $\varepsilon>0$ $\exists\lambda_0=\lambda_0(\varepsilon)$ כך שלכל $\lambda\ge\lambda_0(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|=|J_3(\delta)|\le\frac{\varepsilon}{4}\quad(2.12)$$

להערכת $J_4(\delta)$ ו $J_5(\delta)$:

$$J_4(\delta)=-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt,\ J_5(\delta)=-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{\infty}^{-\delta}\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

נשים
לב:

$$\int_{\infty}^{-\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \left[\frac{\sin \lambda t}{t} : even\ function \right] = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = [\lambda t = s] = \int_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin s}{\frac{s}{\lambda}} \frac{ds}{\lambda}$$

$$= \int_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds \Rightarrow$$

כאשר הנקודה x נתונה ולא משתנה, אז הערכים $f(x+0), f(x-0)$ סופיים ולא משתנים. לכן, כיוון שאינטגרל דריכלה $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס, אז לפי $\varepsilon > 0$ הנתון והנקודה x הנתונה והמספר δ, שנבחרו לעיל בהתאם ל ε נמצא $\lambda_1(\varepsilon) \geq \lambda_0(\varepsilon)$ כך ש:

$$|J_4(\delta)| + |J_5(\delta)| = \left| \frac{f(x+0)}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| + \left| \frac{f(x-0)}{\pi} \int_{\infty}^{-\delta} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| \leq$$

$$\leq C(x) \left| \int_{\lambda\delta}^{\infty} \frac{\sin t}{t} ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ix\sigma} F(\sigma) d\sigma - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| \leq \varepsilon$$

אם $\lambda(\varepsilon) \geq \lambda_2(\varepsilon) \Leftarrow$ מש"ל.

מסקנה 2.5:

תהי $f \in L_1(R)$ ובנקודה x הפונקציה f בעלת נגזרות חלקיות משמאל ומימין $f_+^{'}(x), f_-^{'}(x)$, כלומר קיימים הגבלות הסופיים:

$$f_+^{'}(x) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2}$$

$$f_-^{'}(x) \overset{def}{=} \lim_{t \to 0+0} \left[-\frac{f(x-t) - f(x-0)}{2} \right]$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ix\sigma}F(\sigma)d\sigma$$

אזי

$$\left(=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma\right)\quad(2.13)$$

הוכחה:

מקיום $f_+^{'}(x), f_-^{'}(x)$ נובע שבנקודה x מתקיימים תנאי הולדר, קיום משמאל מימין (שניהם מסדר 1); והרי כיוון שמתקיים השוויון

$$\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}=f_+^{'}(x)+\varepsilon(t),\quad \lim_{t\to+0}\varepsilon(t)=0$$ כאשר $\left|f_+^{'}(x)\right|<0$

אז עבור $L=2\max\left\{\left|f_+^{'}(x)\right|,1\right\}$ ועבור $t>0$ מספיק קטן מתקיים:

$\left|f(x+t)-f(x+0)\right|\le Lt$ (תנאי הולדר מימין עם $\alpha=1$), כפי הדרוש. באופן דומה נבדוק את תנאי הולדר מסדר 1 משמאל. וכן מתקיימים כל תנאי משפט 2.2 (העיקרי) ולכן מתקיים (2.13). מש"ל.

3.ניסוח המשפטים העיקריים לפונקציות חלקות למקוטעין

הגדרה 3.1:

תהי פונקציה $f(x)$ ב$[a,b]$, $b-a<\infty$. אם:

1. הפונקציה $f(x)$ גזירה בכל נקודה $x\in[a,b]$

2. הנגזרת שלה $f'(x)$ רציפה לכל $x\in[a,b]$

אזי הפונקציה $f(x)$ נקראת *חלקה* בקטע $[a,b]$.

אם $f(x)$ חלקה ב$[a,b]$, אז עבור הזזת העקומה לאורך $y=f(x)$, כיוון המשיק משתנה באופן רציף, ללא קפיצות $\Leftarrow$ על העקומה אין נקודות *חוד*.

הגדרה 3.2:

תהי הפונקציה $f(x)$ נתונה ב$[a,b]$, $b-a<\infty$. אם הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ או רציפות בכל הקטע$[a,b]$ או בעלת נקודות רציפות מסוג 1 ומספרן סופי, אז הפונקציה $f(x)$ נקראת *חלקה למקוטעין* בקטע $[a,b]$.

<u>נשים לב</u> לכך שלפונקציה חלקה למקוטעין, הפונקציות $f_+'(x), f_-'(x)$ קיימות וסופיות, כאשר אצלנו יכולות להיות נקודות אי רציפות רק מסוג 1 ועבור $f(x)$ ו $f'(x)$ $\Leftarrow$ הגבולות החד צדדיים של $f(x)$ ו $f'(x)$ קיימים $\forall x\in[a,b]$ וסופיים.

הגדרה 3.3:

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל הציר R, נקראת חלקה למקוטעין אם היא חלקה למקוטעין בכל קטע סופי.

מההערה לעיל ("נשים לב") וממסקנה (2.5) נובע

משפט 3.4:

אם $f(x)\in L_1(R)$ ובנוסף הפונקציה הינה חלק למקוטעין בכל הציר R, אז נוסחת פורייה האינטגרלית מתקיימת לכל $x\in R$:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ix\sigma}F(\sigma)d\sigma$$

$$\left(=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma\right)\quad(3.1)$$

4.אינטגרל פורייה בצורה הממשית

האינטגרל (3.1) יקרא אינטגרל פורייה (עבור הפונקציה $f(t)$) בצורה המרוכבת.

מהמשפט העיקרי (2.2) נובע:

משפט 4.1:

תהי $f \in L_1(R)$ ומתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $f(\cdot)$ מקיימת את תנאי הולדר מימין מסדר $\alpha_1 \in (0,1]$ בנקודה נתונה x.
2. הפונקציה $f(\cdot)$ מקיימת את תנאי הולדר משמאל מסדר $\alpha_2 \in (0,1]$ בנקודה נתונה x.

אז מתקיים השוויון:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma \quad (4.1)$$

<u>הערה:</u> הנוסחא (4.1) מייצגת פיתוח פונקציה לאינטגרל פורייה בצורתו הממשית.

מסקנה 4.2:

אם $f \in L_1(R)$ ובנוסף הפונקציה f הינה חלקה למקוטעין בכל הציר R, אז הנוסחא האינטגרלית של פורייה בצורה הממשית (ראה 4.1) מתקיימת לכל $x \in R$.

<u>הערה:</u> אנו נוכיח בהמשך רק את משפט 4.1. מסקנה 4.2 נובעת ממשפט 4.1, כמו כן, משפט 3.4 נובע ממשפט 2.2 (העיקרי) ולכן מסקנה 2 נשארת ללא הוכחה.

הוכחת משפט 4.1:

תנאי משפט 4.1 ו2.2 דומים $\Leftarrow$ לפי משפט 2.2 מתקיים:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma \quad (4.2)$$

נתבונן באינטגרל הפנימי ב(4.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\sigma(t-x)+i\sin\sigma(t-x)\right]f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sigma(t-x)f(t)dt+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma(t-x)f(t)dt:=J(\sigma)+iI(\sigma)$$

נראה כי הפונקציות $J(\sigma)$ ו $I(\sigma)$ רציפות עבור $\sigma\in R$. שתי הבדיקות דומות. נתבונן למשל ב $J(\sigma)$. אנו צריכים להראות שעבור כל סדרה $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך $\sigma_n\to\sigma$ עבור $n\to\infty$ מתקיים השוויון:

$$\lim_{n\to\infty}J(\sigma_n)=J(\sigma)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma_n(t-x)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma(t-x)dt \quad (4.3)$$

עבור בדיקת (4.3) דרוש להצדיק את החלפת הגבולות תחת סימן האינטגרל (4.3), אנו משתמשים כאן במסקנה 3.7 ומשפט ארצלה-לבג (הרצאה 1, עמוד 8)

לפי סימוני המסקנה, נניח:

$\varphi_n(t)=f(t)\cos\sigma_n(t-x),\ n=1,2,...$ נבדוק לפי הסדר את התנאים 1-4 של המסקנה:

1. $\varphi_n(t)\in L_1(R)$. <u>במקרה שלנו:</u> $\varphi_n(t)\in L_1^{loc}(R)$ כיוון ש $f(t)\in L_1^{loc}(R)$; $\cos\sigma_n(t-x)\in L_1^{loc}(R)$ (אם שתי פונקציות אינטגרביליות לפי רימן בקטע סופי אז הנגזרת אינטגרבילית בקטע נתון) $\Leftarrow$ $\varphi_n(t)\in L_1^{loc}(R)$. כיוון ש$f\in L_1(R)$ $\Leftarrow$

$$\left|\varphi_n(t)\right|\le\left|f(t)\cos\sigma_n(t-x)\right|\le\left|f(t)\right|\Rightarrow\varphi_n(t)\in L_1(R),\quad\forall n$$

2. קיימת פונקציה מסוימת $\varphi(t)$ על R כך שהסדרה $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל $\varphi(t)$ כמעט בכל מקום על R (זאת אומרת כמעט בכל מקום על R $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$). <u>במקרה שלנו:</u>

נניח: $\varphi_n(t)=f(t)\cos\sigma_n(t-x),\ n=1,2,...$. $\varphi(t)=f(t)\cos\sigma(t-x),\ t\in R$. כיוון ש $f\in L_1^{loc}(R)$ (במובן של רימן), אז $f(t)<\infty$; כיוון ש $\cos(\cdot)$ פונקציה רציפה, אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=f(t)\lim_{n\to\infty}\cos\sigma_n(t-x)=f(t)\cos\sigma(t-x)=\varphi(t)$$

3. קיים פונקציה $F(t)\in L_1(R)$ אינטגרבילית במובן של רימן, כך ש $\left|\varphi_n(t)\right|\le F(t),\quad \forall t\in R,\quad \forall n\ge 1$. <u>במקרה שלנו:</u>

$F(t):=\left|f(t)\right|\Rightarrow F(t)\in L_1(R)$ ובנוסף

$$\left|\varphi_n(t)\right|=\left|f(t)\cos\sigma_n(t-x)\right|\le\left|f(t)\right|=F(t),\quad \forall t\in R,\quad \forall n\ge 1$$

4. $\varphi(t)\in L_1(R)$. <u>במקרה שלנו:</u> $\varphi(t)=f(t)\cos\sigma(t-x)\in L_1^{loc}(R)$ (ראה 2) וגם $\left|\varphi(t)\right|\le\left|f(t)\right|\in L_1(R)\Rightarrow\varphi\in L_1(R$.

אם כך, כל התנאים מתקיימים ולכן:

$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt$. כלומר, במקרה שלנו:

$$\lim_{n\to\infty} J(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma_n(t-x)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f(t)\cos\sigma_n(t-x)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt = J(\sigma)$$

זאת אומרת, הפונקציה $J(\sigma)$ (והפונקציה $I(\sigma)$):

$$J(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt, I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma(t-x)dt$$ רציפה

עבור $\forall\sigma \in R$. ואז:

$$J(-\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(-\sigma)(t-x)dt = \left[\cos\alpha = \cos(-\alpha)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt = J(\sigma)$$

$$I(-\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(-\sigma)(t-x)dt = \left[\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\right] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma(t-x)dt = -I(\sigma)$$

אם כן,

$$J(\sigma) = J(-\sigma), I(\sigma) = -I(\sigma), \quad \forall\sigma \in R \quad (4.4)$$

כיוון ששתי הפונקציות רציפות $\forall\sigma \in R$, אז הן אינטגרביליות בכל קטע $[-\lambda, \lambda]$ $\lambda > 0$ ובעזרת (4.3) מתקיים:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma = 2\int_{0}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma = 2\int_{0}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} I(\sigma)d\sigma = \int_{-\lambda}^{0} I(\sigma)d\sigma + \int_{0}^{\lambda} I(\sigma)d\sigma = 0 \Rightarrow$$

מאינטגרל פורייה בצורתו המורכבת נקבל (ראה (4.2)):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma(t-x)}dt\right]d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(J(\sigma)-iI(\sigma)\right)d\sigma = \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma =$$

לפי ההגדרה של האינטגרל הלא מסוים זה שווה ל

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} J(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma$$

את הנוסחא (4.1) (כלומר התוצאה של המשפט 4.1):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma \quad (4.1)$$

או בכתיב אחר נקבל:

$$\cos\sigma(t-x)=\cos(\sigma t-\sigma x)=\cos\sigma t\cdot\cos\sigma x+\sin\sigma t\cdot\sin\sigma x\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\sigma t-\sigma x)dt=$$

$$=\cos\sigma x\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt\right]+\sin\sigma x\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt\right]$$

נכניס סימון חדש:

$$a(\sigma):=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt\right],\quad b(\sigma):=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt\right]$$

ונקבל:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_{0}^{\infty}\left[a(\sigma)\cos\sigma x+b(\sigma)\sin\sigma x\right]d\sigma\\&a(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt\\&b(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt\end{aligned}\right\}(4.5)$$

5. תרגילים לפיתוח פונקציות לאינטגרל פורייה

המטרה העיקרית: למצוא פיתוח לאינטגרל פורייה עבור פונקציה נתונה f .

תרגיל 1 : (פתרון של המרצה)

בהינתן פונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \qquad (5.0)$$

למצוא את הפיתוח שלה לאינטגרל פורייה.

פתרון:

כל השאלות מהסוג הנ"ל ניתן לפתור בצורה דומה. אם פונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים לפיתוח שלה לאינטגרל פורייה אז מהנוסחא של הפיתוח הנ"ל:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-i\sigma x}F(\sigma)d\sigma \qquad (5.1)$$

($F(\sigma)$ - פיתוח פורייה של פונקציה f)

לכן, צריך למצוא את $F(\sigma)$ ולהציב אותו ל-(5.1). נקבל את אותה התוצאה אם נחשב את האינטגרל הפנימי בנוסחא (5.2), השקולה ל-(5.1):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma \qquad (5.2)$$

אם נפריד בנוסחה (5.2) או (5.1) את החלק הממשי , אז נקבל פיתוח בצורה ממשית של פונקציה f לאינטגרל פורייה

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma \quad (5.3)$$

נחזור כעת לפתרון של התרגיל. מובן שפונקציה (5.0) חלקה למקוטעין על R ו $f\in L_1(R)$. פונקציה $f(x)$ רציפה ודיפרנציאבילית בכל מקום פרט לנקודה $x=0$, ובנקודה $x=0$ לפונקציה f יש אי רציפות מהסוג הראשון כמו כן הנגזרת שלה גם כן אי רציפה בנקודה זו:

$$f_{-}^{'}(0)=1\ ,\ f_{+}^{'}(0)=0$$

התנאי $f\in L_1(R)$ מתקיים כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt=e^{t}\Big|_{-\infty}^{0}=1<\infty$$

לכן $f\in L_1(R)$ וכמו כן היא פונקציה רציפה למקוטעין על R בנוסחא (5.2):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma \quad (5.2)$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma(t-x)}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{i\sigma(t-x)}dt = e^{-i\sigma x}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+i\sigma)t}dt =$$

$$= \frac{e^{-i\sigma x}}{1+i\sigma}\left[e^{(1+i\sigma)t}\Big|_{-\infty}^{0}\right] = \frac{e^{-i\sigma x}}{1+i\sigma} = \frac{1-i\sigma}{1+\sigma^2}e^{-i\sigma x} =$$

$$= \frac{(1-i\sigma)(\cos\sigma x - i\sin\sigma x)}{1+\sigma^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\cos\sigma x - \sigma\sin\sigma x}{1+\sigma^2}}_{\text{פונקציה זוגית לפי } \sigma} - i\underbrace{\frac{\sin\sigma x + \sigma\cos\sigma x}{1+\sigma^2}}_{\text{פונקציה אי זוגית לפי } \sigma} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x - \sigma\sin\sigma x}{1+\sigma^2}d\sigma \qquad (5.4)$$

וכיוון שעבור $x \neq 0$ פונקציה $f(x)$ רציפה, מ-(5.2) נובע:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ e^x, & x \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma x - \sigma\sin\sigma x}{1+\sigma^2}d\sigma, \quad x \neq 0$$

ואם $x = 0$ מ(5.4) נובע:

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\sigma^2}d\sigma = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

לכן: $f(0) = 1$.

תרגיל 2: (פתרון של המרצה)

למצוא את הפיתוח אינטגרל פורייה של פונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad a \neq 0 \quad (a > 0)$$

פיתרון:

בהרצאה 2 , בעזרת שאריות קיבלנו ($\forall \sigma \in R$):

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\sigma t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\sigma t}}{t^2 + a^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a|\sigma|}}{a}$$

ולכן (כיוון שפונקציה $f(x)$ חלקה על R ו $f \in L_1(R)$, אז פיתוח לאינטגרל פורייה קיים):

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \left| \, \mathrm{R} \; (\qquad) \;\; (f \;\; x \, \right|) = f \;\; x$$

ראה (5.1)

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-i\lambda x} F(\sigma) d\sigma = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{-a|\sigma|}}{a} e^{-i\sigma x} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2a} \lim_{\lambda \to +\infty} \left[\int_{-\lambda}^{\lambda} \underbrace{e^{-a|\sigma|} \cos \sigma x d\sigma}_{\text{פונקציה זוגית לפי } \sigma} - i \int_{-\lambda}^{\lambda} \underbrace{e^{-a|\sigma|} \sin \sigma x d\sigma}_{\text{פונקציה אי זוגית לפי } \sigma} \right] =$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} e^{-a\sigma} \cos \sigma x d\sigma = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\sigma} \cos \sigma x d\sigma \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-a\sigma}\cos\sigma x d\sigma, \qquad \forall x\in R}$$

תרגיל 3: (ניסוח של המרצה)

למצוא את הפיתוח לאינטגרל פורייה של פונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\\ 0, & x<0\end{cases}$$

פיתרון:

ניתן לראות כי $f\in L_1(R)$ ו f פונקציה רציפה למקוטעין על R (לפי הגרף שלה). לכן לפי נוסחת פיתוח לאינטגרל פורייה (הצורה הממשית) מקבלים

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^\infty\left[a(\sigma)\cos\sigma x+b(\sigma)\sin\sigma x\right]d\sigma,$$

$$a(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\sigma t dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\sigma t dt=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\bigg|_0^1=\boxed{\frac{1}{\pi}\frac{\sin\sigma}{\sigma}}$$

$$b(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\sigma t dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\sigma t dt=-\frac{\cos\sigma t}{\pi\sigma}\bigg|_0^1=\boxed{\frac{1}{\pi\sigma}\left(1-\cos\sigma\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^\infty\left[\frac{\sin\sigma\cos\sigma x}{\pi\sigma}+\frac{1-\cos\sigma}{\pi\sigma}\sin\sigma x\right]d\sigma$$

6. נוסחת פורייה האינטגרלית והערך העיקרי של האינטגרל הלא מסוים

תזכורת [הרצאה 2 נושא 4]:

אם $f(x)\in L_1(R)$ אז הערך העיקרי של האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ (במובן של קושי) זה הערך:

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)dx \qquad (6.1)$$

נעביר כעת את התוצאות העיקריות שלנו לניסוח של הערך העיקרי של האינטגרל הלא מסוים (6.1). לכתיבה מקוצרת (ורק לצורך כך!) נניח בהמשך שהפונקציה $f(x)$ שייכת ל-$L_1(R)$ והינה חלקה למקוטעין על R, למרות שכל מה שנדון בו בהמשך, נכון גם אם בנקודה מסוימת (קבועה מראש) $x\in R$ פונקציה f מספקת רק את הדרישות החד כיווניות של הולדר.

משפט 6.1: (שקול למשפט 3.4 לעיל)

אם $f(x)\in L_1(R)$ ובנוסף פונקציה $f(x)$ חלקה למקוטעין על כל הציר R, אזי $\forall x\in R$ מתקיימת הנוסחא האינטגרלית של פורייה בצורתה המרוכבת:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma=\\&=v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma(t-x)}f(t)dt\right]d\sigma\end{aligned} \qquad (6.2)$$

המשפט 6.1 שקול למשפט הבא:

משפט 6.2:

אם $f(\mathrm{x})\in \mathrm{L}_1(R)$ וחוץ מזה f הינה חלקה למקוטעין בכל הציר R, אזי $\forall x\in R$ מתקיימת הנוסחא האינטגראלית של פורייה בצורה ממשית:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt]d\sigma \qquad (6.3)$$

קיבלנו (6.3) מ-(6.2).

כמו כן קיימת הוכחה בכיוון ההפוך,קודם כל מקבלים את הנוסחא (6.3), וממנה מקבלים את (6.2).מזה נובע שהנוסחאות (6.2) ו-(6.3) שקולות.אך ב-(6.2) האינטגרל אינו רגיל , אלא הינו במשמעות העיקרית לפי קושי,וב-(6.3) לא ניתן להשתמש במשמעות הנ"ל,עקב כך שב-(6.3) אינטגרל לא מסוים רגיל.ומכאן עולות שתי שאלות:

1. מה הסיבה להופעת משמעות עיקרית ב-(6.2)?
2. באילו מקרים ב-(6.2) ניתן לשייך את האינטגרל לרגיל,ולא לאינטגרל במשמעות העיקרית?
3. ניתן להביא דוגמא,שתדגיש את החיוניות של המשמעות העיקרית ב-(6.2).

1. (6.2) שקול ל-(6.3),ונניח כי אנו רוצים לקבל (6.3) מ-(6.2). אזי הפונקציות:

$$J(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt,\ \sigma\in \mathrm{R} \qquad (6.4)$$

$$I(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma(t-x)dt,\ \sigma\in \mathrm{R} \qquad (6.5)$$

הינן רציפות ו-$J(\sigma)$ הינה זוגית לפי σ, $I(\sigma)$ הינה אי זוגית

לפי $\Leftarrow 0 < \forall\lambda\ \sigma$:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma = 2\int_{0}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma, \ \int_{-\lambda}^{\lambda} I(\sigma)d\sigma = 0 \quad \Rightarrow$$
$$2\int_{0}^{\lambda} J(\sigma)d\sigma = \int_{-\lambda}^{\lambda} (J(\sigma) + iI(\sigma))d\sigma =$$

$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} [\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\sigma(t-x)}dt]d\sigma \qquad (6.6)$$

מהשוויון (6.6) מקבלים את הסיבה העיקרית (ויחידה) להופעת הסימן $v.p.$ ב-(6.2),אחרת אם $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ לא תמיד יתקיים:

$$\boxed{\int_{-\lambda_1}^{\lambda_2} I(\sigma) = 0}$$

2. אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma(t-x)dt$ מתכנס כמו אינטגרל לא מסוים רגיל,אזי הינו מתלכד עם ערכיו העיקריים ולכן שווה לאפס.ורק במקרה הזה בלבד ניתן להוריד את הסימן $v.p.$ ב-(6.2)

3. תרגיל:

להביא את הפונקציה הבאה לאינטגרל פורייה בצורתו המרוכבת:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

פתרון:

הפונקציה $f(x) \in L_1(R)$ והינה חלקה למקוטעין על R $\Leftarrow$

ניתנת להצגה על ידי אינטגרל פורייה בצורתו המרוכבת.$\Leftarrow$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\sigma(t-x)}dt\right]d\sigma=$$

$$=\left|f(t)=0\ \forall|t|>1\right|=\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}e^{-i\sigma(t-x)}dt\right]d\sigma$$

ולכן:

$$\int_{-1}^{1}e^{-i\sigma(t-x)}dt=\begin{cases}-\left.\dfrac{e^{-i\sigma(t-x)}}{i\sigma}\right|_{-1}^{1}, & \sigma\neq 0\\ 2, & \sigma=0\end{cases}$$

$$-\left.\frac{e^{-i\sigma(t-x)}}{i\sigma}\right|_{-1}^{1}=\frac{e^{i\sigma(1+x)}-e^{-i\sigma(1-x)}}{i\sigma}=\frac{e^{i\sigma x}[e^{i\sigma}-e^{-i\sigma}]}{i\sigma}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}e^{i\sigma}=\cos\sigma+i\sin\sigma\\ e^{-i\sigma}=\cos\sigma-i\sin\sigma\Rightarrow e^{i\sigma}-e^{-i\sigma}=2i\sin\sigma\end{array}\right|=$$

$$=\frac{e^{i\sigma x}\cdot 2i\sin\sigma}{i\sigma}=\frac{2(\sin\sigma)e^{i\sigma}}{\sigma}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}e^{-i\sigma(t-x)}dt=\begin{cases}2\dfrac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x}, & \sigma\neq 0\\ 2, & \sigma=0\end{cases}}$$

כעת,נשים לב כי

$$\lim_{\sigma\to 0} 2\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x} = 2 \;\Rightarrow\; \int_{-1}^{1} e^{-i\sigma(t-x)}dt$$

והפונקציה הנ"ל רציפה $\forall\sigma\in R$.

ולכן נגדיר:

$$\varphi(\sigma) := \int_{-1}^{1} e^{-i\sigma(t-x)}dt = 2\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x},\;\; \forall\sigma\in \mathrm{R}$$

לפי ההגדרה $\varphi(\sigma)\big|_{\sigma=0} = 2 \;\Leftarrow$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} v.p.\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x}d\sigma \qquad (6.7)$$

הערה:

בהרצאה השנייה דיברנו על כך,שאינטגרלים המתכנסים במובן של הערך העיקרי,יכולים לא להתכנס במובן הרגיל. ולכן אם נוריד את הסימן $v.p.$ ב-(6.7) ללא הסבר, נוכל לטעות.

נראה כי:

1. אם $x\neq 1,-1$, אזי האינטגרל ב-(6.7) מתכנס במובן הרגיל וכאשר $x\neq 1,-1$ ניתן להוריד את הסימן $v.p.$.
2. עבור $x=1,-1$ האינטגרל ב-(6.7) מתכנס במובן של הערך העיקרי ומתבדר במובן הרגיל ולכן במקרה הזה אסור להוריד את הסימן $v.p.$.

לפי האמור לעיל,מספיק לנו לחקור את החלק המדומה של האינטגרל (6.7):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma := H(x),\ \mathrm{x}\in\mathrm{R} \qquad (6.8)$$

ברור שהאינטגרל ב-(6.8) רציף לכל $\sigma\in R \Leftarrow \forall\varepsilon>0$ קיים האינטגרל:

$$\Leftarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{(\sin\sigma)(\sin\sigma x)}{\sigma}d\sigma$$

נבדוק את ההתכנסות של האינטגרל הלא מסוים הבא:

$$H_{\varepsilon}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin\sigma\cdot\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma$$

אם $\sigma\neq 1,-1$, אזי ($\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$):

$$H_{\sigma}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos(x-1)\sigma}{\sigma}d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos(x+1)\sigma}{\sigma}d\sigma \qquad (6.9)$$

<u>ניזכר בעיקרון דריכלה</u>

משפט 6.3:

אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סופי $[a,A]$, $(A>a)$ והאינטגרל $\int_a^A f(x)dx$ חסום במידה שווה על A:

$$\sup_{A>0}\left|\int_a^A f(x)dx\right|<\infty$$

2. הפונקציה $g(x)\to 0$ כאשר $x\to\infty$ (שאיפה מונוטונית)

אזי האינטגרל $\boxed{\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)dx}$ מתכנס.

האינטגרל שלנו מהצורה:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos l\sigma}{\sigma}d\sigma \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} f(\sigma):=\cos l\sigma \\ g(\sigma):=\dfrac{1}{\sigma} \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

האינטגרל מתכנס לפי עיקרון דריכלה.

לכן,מתכנס האינטגרל $H_{\varepsilon}(k)$ ויחד עימו ,לפי האי זוגיות של האינטגרנד גם האינטגרל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\int \quad \frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma$$

לכן ניתן להוריד את הסימן $v.p.$ מהנוסחא עבור $x \neq 1,-1$:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}v.p.\int_{-\infty}^{\infty}2\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x}d\sigma \qquad (6.7)$$

עקב כך שבמקרה הנ"ל האינטגרל מתכנס במובן הרגיל.

המקרה $x=1,-1$ נבדק בצרה דומה.

למשל, $x=1 \Leftarrow$

$$H_{\varepsilon}(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin\sigma\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma\Big|_{x=1} = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin^2\sigma}{\sigma}d\sigma =$$

$$= \left|\sin^2\sigma = \frac{1-\cos 2\sigma}{2}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1-\cos 2\sigma}{\sigma}d\sigma$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1-\cos 2\sigma}{\sigma}d\sigma = \underset{1}{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma}} - \underbrace{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\cos 2\sigma}{\sigma}d\sigma}_{2} \Rightarrow$$

מתבדר,עקב כך ש-1 מתבדר (2 מתכנס)

לכן לפי האי זוגיות של האינטגרנד ,מתבדר גם האינטגרל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma\Big|_{x=1}$$

ולכן האינטגרל (6.7) עבור $x=1,-1$ לא קיים במובן הרגיל.

ולכן:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x}d\sigma \ , \ \mathrm{x}\neq 1,-1 \\ v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}e^{i\sigma x}d\sigma \ , \ \mathrm{x}=1,-1 \end{cases}$$