פתרון מועד ב קיץ תשעז

20 באוגוסט 2019

1. משפט מהרצאה.
2. $T:V\to V$ ה"ל. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם לכל $0\neq v\in V$ מתקיים כי $Tv\neq v$ אזי T אינה הפיכה.
פתרון: הפרכה: למשל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $Tv=5v$

(ב) קיימת $S:V\to V$ ה"ל כך ש $T+S$ הפיכה.
פתרון: הוכחה: נגדיר $S=-T+S$

(ג) אם קיים n טבעי כך ש $T^n=0$ אזי $\dim\ker T\geq\dim ImT$
פתרון: הפרכה: למשל T המוגדרת ע"י כפל במטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת כי $T^3=0$ אבל $\dim\ker T=1,\dim Im(T)=2$

(ד) אם $\dim\ker T=\dim V-1$ ו $T^2\neq 0$ אזי לכל n טבעי מתקיים $T^n\neq 0$
פתרון: הוכחה: נסמן $B=\{b_1,\dots b_k\}$ בסיס ל$\ker T$ ונשלים אותו לבסיס של V ע"י וקטור בודד, w (לפי ההנחה). כלומר $\{b_1,\dots,b_k,w\}$ בסיס ל V ו $Tb_i=0$. כמובן ש $Tw\neq 0$ כי אחרת $\ker T=V$ ובפרט מאותו מימד.
נוכיח באינדקוציה על n כי $T^nw\neq 0$ ובפרט $T^n\neq 0$. בסיס, עבור $n=1$ מתקיים כי $Tw\neq 0$ כפי שהסברנו. צעד, נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$: $T^{n+1}w=T\left(T^nw\right)$ לפי הנחת האינדוקציה $T^nw\neq 0$ ולכן לא שייך לגרעין. בפרט אם $T^nw=\sum_i\alpha_ib_i+\alpha w$ אזי $\alpha\neq 0$ ואז $T\left(T^nw\right)=\sum_i\alpha_iTb_i+\alpha Tw=\alpha Tw\neq 0$.

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה, $1<n$.
הוכיחו כי קיימת B מדרגה 1 המקיימת $|A+B|=1$
פתרון: מקרה ראשון, $|A|\neq 1$: במקרה זה מתקיים שגם $|A|^{-1}\neq 1$. נגדיר B להיות מטריצת אפסים פרט לשורה הראשונה שנגדיר אותה להיות $\alpha R_1(A)$ כאשר $\alpha=|A|^{-1}-1$. לפי הגדרה $rank(B)=1$ כיוון שהשורה הראשונה שונה מאפס והיא השורה היחידה ששונה מאפס. בנוסף $|A+B|=(1+\alpha)|A|=|A|^{-1}\cdot|A|=1$ מלינאריות של הדט' בשורה הראשונה.
מקרה שני $|A|=1$: נגדיר מטריצה B' להיות מטריצת אפסים פרט למיקום $1,n$ שנגדירו להיות 1. ברור כי $rank(B')=1$ ולכן גם $B=AB'$ כי כפל במטריצה A שהיא הפיכה לא משנה את הדרגה. בנוסף

$$|A+B|=|A\cdot I+AB'|=|A|\cdot|I+B'|=|A|=1$$

כאשר $|I+B'|=1$ כי זה מטריצה משולשית עליונה שעל אלכסונה אחדות.

4. $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $W=span\left(S\right)$ כאשר

$$S=\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 3 & 1 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} -1 & 3\\ 5 & -7 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} 1 & 9\\ 11 & -5 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ -1 & 2 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} -1 & 6\\ 9 & -8 \end{array}\right)\right\}$$

(א) צמצמו את S לבסיס B של W

(ב) מצאו $A\in V$ המקיימת $A\notin W$

(ג) מצאו בסיס B ל W כך ש $\left(\begin{array}{cc} -2 & 3\\ 6 & -13 \end{array}\right)\in B$

(ד) האם הקבוצה

$$U=\left\{ A\in W\mid A^{t}=-A\right\}$$

היא ת"מ של V? אם כן מצאו לה בסיס.

פתרון: נעבוד עם הבסיס הסטנ' של V לכל אורך השאלה ונתחיל בדירוג הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 3 & 3 & 9 & 0 & 6 & b\\ 3 & 5 & 11 & -1 & 9 & c\\ 1 & -7 & -5 & 2 & -8 & d \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 & b-3a\\ 0 & 8 & 8 & -4 & 12 & c-3a\\ 0 & -6 & -6 & 1 & -7 & d-a \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 & b-3a\\ 0 & 8 & 8 & -4 & 12 & c-3a\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & d-a+b-3a \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 & \left(b-3a\right)/3\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 & \left(c-3a\right)/4\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & d-a+b-3a \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 & \left(b-3a\right)/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3c-9a-4b+12a}{12}\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & d-a+b-3a \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & a\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 & \left(b-3a\right)/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \left(d-a+b-3a\right)/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3c-9a-4b+12a}{12} \end{array}\right)$$

ולכן:

(א) כיוון שיש צירים בעמודה $1,2,4$ במדורגת (נתעלם בוקטור התוצאה), עמודות $12,4$ במקורית מהוות בסיס ולכן התשובה היא

$$B=\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 3 & 1 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} -1 & 3\\ 5 & -7 \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ -1 & 2 \end{array}\right)\right\}$$

(ב) כיוון ש

$$W=\left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\in V\mid 3a-4b+3c=0\right\}$$

נקבל כי $\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{array}\right)\notin W$

(ג) רואים כי $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} \in W$. נשים את וקטור הקור' כשורה במטריצה (שהיא כבר מדורגת) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 & -13 \end{pmatrix}$, רואים כי

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 & -13 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מדורגת ולכן השורות בת"ל. כיוון שכל שורה מייצגת מטריצה שב W והמימד שלו 3 נקבל שהמטריצות האלה בסיס, בצורה מפורשת

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ד) זה ת"מ כי ראינו ש $W_1 = \{A \in V \mid A^t = -A\}$ הוא תת מרחב (מרחב המטריצות האנטי סימטריות). ולכן $U = W \cap W_1$ הוא ת"מ כחיתוך של תתי מרחבים. כיוון ש $\dim W_1 = 1$ אזי נקבל כי $\dim U \in \{0, 1\}$ אם $\dim U = 1$ אזי נסיק כי $U = W_1$ אבל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin W$ (המטריצה לא עונה על המשוואה). מכאן נסיק ש $\dim U = 0$ ולכן $U = \{0\}$.

5. תהא $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ה"ל המוגדרת $T(x, y, z) = (0, x, y)$.
נתונים $B = \{b_1, b_2, b_3\}, C = \{c_1, c_2, c_3\}$ בסיסים ו

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את a
פתרון: T אינה חח"ע (למשל $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = T(0, 0, 0)$) ולכן לא הפיכה ולכן $[T]_C^B$ אינה הפיכה. נבדוק מתי הדט' שלה שווה אפס

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 1 & 2 & a+10 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 1 & a+10 \end{pmatrix} \right| = 2a + 20 - 14 = 2a +$$

ולכן הדט שווה אפס אמ"מ $a = -3$

(ב) נתון כי $tb_1 + sb_2 + b_3 = (0, 0, 1)$, מצאו את t, s
פתרון: נפעיל T על שני האגפים ונקבל כי $tTb_1 + sTb_2 + Tb_3 = (0, 0, 0)$ נציג שיווין זה בעזרת הבסיס C ונקבל

$$t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ולכן $(t,s)=(-7,5)$

(ג) הוכיחו כי $c_1+c_2+c_3\in Im(T)$

פתרון: מתקיים כי $[ImT]_C=C([T]_C^B)$ ולכן השאלה שקולה לכך ש $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in$ $C([T]_C^B)$ או באופן שקול שיש פתרון למערכת $[T]_C^Bx=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. נדרג ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&1\\1&2&-3&1\\4&5&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\2&3&-1&1\\4&5&3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\0&3-1&5&-1\\0&-3&15&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&1\\0&3-1&5&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

ואכן יש פתרון למערכת (הגענו לצורה מדורגת, ללא שורת סתירה).

(ד) נגדיר בסיסים סדורים $E=\{b_2,b_1+b_3,b_1-b_3\}\,,F=\{c_2,c_3,c_1\}$. מצאו את $[T]_F^E$.

פתרון:

$$[T]_F^E=[I]_F^C[T]_C^B[I]_B^E$$

מחישוב ישיר נקבל כי

$$[I]_C^F=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},[I]_B^E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

כיוון ש $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\left([I]_C^F\right)^{-1}=[I]_F^C$ נקבל כי

$$\begin{aligned}[T]_F^E&=[I]_F^C[T]_C^B[I]_B^E\\&=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&-3\\4&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&-3\\4&5&3\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&-2&4\\5&7&1\\3&1&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$