פתרון תרגיל בית מספר 1

1. הוכיחו את התכונות הבאות של המספרים המרוכבים z, z_1, z_2:

א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, וכנ"ל עבור Im.

נסמן $z_1=a_1+b_1 i$ ו - $z_2=a_2+b_2 i$

$$\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}((a_1+b_1)+(a_2+b_2)i)=a_1+a_2$$

$$\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)=a_1+a_2$$

ב. זהות המקבילית: $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$. מהי המשמעות הגיאומטרית?

טריוויאלי: פותחים את אגף שמאל (למשל) ומגיעים לאגף הימני. המשמעות הגיאומטרית היא: סכום ריבועי אלכסוני המקבילית שווה לסכום ריבועי הצלעות.

2. פתרו את המשוואה: $z^4+2+2\sqrt{3}\cdot i=0$

מתקיים $z^4=-2-2\sqrt{3}\cdot i$. נעביר את $-2-2\sqrt{3}\cdot i$ להצגה קוטבית: $-2-2\sqrt{3}\cdot i=4e^{\frac{4\pi i}{3}}$ (שימו לב שיש להוסיף π לזווית, שכן המספר נמצא ברביע השלישי). לפי נוסחת השורשים מתקיים: $z=\sqrt{2}e^{\left(\frac{\frac{4\pi i}{3}+2\pi k}{4}\right)}$ ולכן ארבעת השורשים הם: $\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$.

3. חשבו את הביטוי: $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$

$$\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n(1+i)^2=\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n\cdot 2i=\left(\frac{2i}{2}\right)^n\cdot 2i=2i^{n+1}$$

נשים לב ש $i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1^k=1$ כאשר k שלם אי שלילי ומכאן: $i^{n+1}=\begin{cases} i & n=4k \\ -1 & n=4k+1 \\ -i & n=4k+2 \\ 1 & n=4k+3 \end{cases}$

ולכן

$$\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}=2i^{n+1}=\begin{cases} 2i & n=4k \\ -2 & n=4k+1 \\ -2i & n=4k+2 \\ 2 & n=4k+3 \end{cases}$$

4. מצאו $z=n+mi$, n,m שלמים כך שמתקיים: $z^3=2+11i$ (רמז: היעזרו בנתון ש-n,m שלמים)

יהי $z=n+mi$, כאשר $n,m\in\mathbb{Z}$. נעלה אותו בחזקה שלישית ונשווה עם הנתון:

$(n+mi)^3=n^3-3nm^2+i\left(3n^2m-m^3\right)=2+11i$. מהשוואת החלקים הממשי והמדומה

מקבלים מערכת משוואות: $\begin{cases} n\left(n^2-3m^2\right)=2 \\ m\left(3n^2-m^2\right)=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^3-3nm^2=2 \\ 3n^2m-m^3=11 \end{cases}$. אם נתבונן

במשוואה הראשונה, נוכל לשים לב כי n חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm1,\pm2$.

באופן דומה m חייב להיות אחד מהמספרים הבאים: $\pm1,\pm11$ אבל הפתרון היחידי המקיים

את שתי המשוואות יחד הוא: $n=2,\ m=1$. (מציבים $n=2$ ומקבלים ש $m=1$ וכשמציבים

$n=\pm1,-2$ רואים שאין פתרון שלם מתאים ל m).

5. יהא $n\geq 2$ טבעי, ויהא P אוסף שורשי היחידה מסדר n.

א. הוכיחו שקיים $z\in P$ (כלומר קיים שורש יחידה) כך ש-$P=\left\{1,z,z^2,\ldots,z^{n-1}\right\}$

ב. הראו שסכום איברי P הוא אפס. (רמז: סדרה הנדסית)

[תזכורת: $z\in\mathbb{C}$ הוא שורש יחידה מסדר n אם $z^n=1$]

א. נפתור את המשוואה $z^n=1$. מתקיים $(cis(\theta))^n=cis(n\theta)=1$ אמ"מ $n\theta=2\pi k$ עבור

$0\leq k<n$ ולכן הפתרונות הם $z_k=cis(\frac{2\pi k}{n})$ עבור $0\leq k<n$. z_1 מקיים את

הדרוש (מדוע?).

ב. שימו לב: $z_1 \neq 1$ ולכן קיבלנו סידרה הנדסית $1 \neq q = z_1$. נשתמש בנוסחה עבור סידרה הנדסית ונקבל: $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{z_1^{\,n}-1}{z_1-1} = 0$.

6. תהא נתונה המשוואה $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$ וידוע כי a_i ממשיים לכל $0 \le i \le n$.
הוכיחו שאם z הוא פתרון של המשוואה, אזי גם $\bar{z}$ (הצמוד המרוכב) הוא פתרון שלה.

נתונה המשוואה $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$. נתון גם כי z הוא פתרון של המשוואה ולכן מתקיים $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0 = 0$. נפעיל הצמדה על שני האגפים ונקבל $\overline{\left(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0\right)} = 0$ ולפי תכונות ההצמדה (ואם נשים לב שכל המקדמים הם ממשיים) נוכל להגיע ל: $a_n \left(\bar{z}\right)^n + a_{n-1}\left(\bar{z}\right)^{n-1} + ... + a_0 = 0$. מכאן רואים ש- $\bar{z}$ מהווה פתרון למשוואה.

7. הוכיחו את הזהות: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$ (בשימוש משפט דה-מואבר).

מחד, מתקיים:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\sin\theta + 3\cos\theta\left(i\sin\theta\right)^2 + \left(i\sin\theta\right)^3$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

מאידך, עפ"י משפט דה – מואבר מתקיים:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

לאחר השוואת החלקים המדומים מקבלים: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$, כנדרש.