# לכסון אורתוגונאלי

**תזכורת - למדנו בשיעור האחרון :**

- כל מטריצה סימטרית $A \in F^{n\times n}$ ניתנת ללכסון - כלומר יש בסיס ל $F^n$ המורכב מו"ע של A.
- למטריצה סימטרית יש ע"ע ממשיים. (הוכחנו)
- במטריצה סימטרית, ו"ע של ע"ע שונים הם אורתוגונאלים. (הוכחנו)

לכן, כל מטריצה סימטרית ניתנת ללכסון אורתוגונאלי כלומר : $A = PDP^{-1}$ כאשר P– אורתוגונאלית.
למדנו שלכל מטריצה אורתוגונאלית מתקיים : $P^{-1} = P^t$ ולכן בעצם נקבל :

$A = PDP^t$ וזהו הלכסון האורתוגונאלי

**דוגמה:**

נמצא לכסון אורתוגונאלי עבור $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**שלב א' :** פולינום אופייני: $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -(\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$

**שלב ב' :** ערכים עצמיים : $\lambda_1 = 2$ בריבוי אלגברי 2 , $\lambda_2 = 8$ בריבוי אלגברי 1.

**שלב ג' :** מרחבים עצמיים :

בסיס למרחב העצמי של $\lambda_2 = 8$ הוא $V = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ננרמל את הווקטור היחיד בבסיס $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1 = 2$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ אינם

קל לראות ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ניצב ל כל אחד מהוקטורים : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

נהפוך את הבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ לאורתוגונאלי בשיטת גראם – שמידט :

נסמן $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ , וכעת $u_2=v_2-\frac{\langle u_1,v_2\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}\cdot u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

ננרמל את הווקטורים : $\tilde{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \tilde{u}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ .

המטריצה האלכסונית : $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$. המטריצה המלכסנת : $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

ולכן הלכסון האורתוגונאלי הוא : $\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}P^t$