תרגיל 9

1. ניזכר כי $S^{-1}R$ זה אוסף מחלקות השקילות $[\frac{r}{s}]$ עבור יחס השקילות $\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \iff s'r = r's$. הוכיחו שפעולות החיבור והכפל שהגדרנו בכיתה מוגדרות היטב.
הוכחה:
כפל: נניח ש $\frac{r_1}{s_1} \sim \frac{r_1'}{s_1'}, \frac{r_2}{s_2} \sim \frac{r_2'}{s_2'}$. כלומר, $r_1s_1' = s_1r_1', r_2s_2' = s_2r_2'$. צריך להוכיח ש $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} \sim \frac{r_1'}{s_1'} \cdot \frac{r_2'}{s_2'}$. אכן, מהכפלת שתי השוויונות נקבל $r_1s_1'r_2s_2' = s_1r_1's_2r_2'$. כלומר,

$$(r_1r_2)(s_1's_2') = (r_1'r_2')(s_1s_2)$$

חיבור: נניח ש $\frac{r_1}{s_1} \sim \frac{r_1'}{s_1'}, \frac{r_2}{s_2} \sim \frac{r_2'}{s_2'}$. כלומר, $r_1s_1' = s_1r_1', r_2s_2' = s_2r_2'$. צריך להוכיח ש $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} \sim \frac{r_1'}{s_1'} + \frac{r_2'}{s_2'}$. כלומר, $\frac{r_1's_2' + r_2's_1'}{s_1's_2'} \sim \frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2}$. נשתמש במשוואות מההנחה לקבל (בשיוויון של הכוכבית):

$$\begin{aligned}
&(r_1s_2 + r_2s_1)\, s_1's_2' = \\
&(r_1s_1')\, s_2s_2' + (r_2s_2')\, s_1s_1' \overset{*}{=} \\
&(s_1r_1')\, s_2s_2' + (s_2r_2')\, s_1s_1' = \\
&(r_1's_2')\, s_1s_2 + (r_2's_1')\, s_1s_2 = \\
&(r_1's_2' + r_2's_1')\, s_1s_2
\end{aligned}$$

2. יהי R חוג קומוטטיבי. הוכיחו את השקילות הבאה:
   (א) R מקומי.
   (ב) לכל $x \in R$ לא הפיך בR, $1 - x$ הפיך.

   הוכחה: ראינו בתרגול שחוג הוא מקומי אמ"ם אוסף האיברים הלא הפיכים סגור לחיבור.

   נניח שאוסף האיברים הלא הפיכים סגור לחיבור. אזי אם x לא הפיך וגם $1 - x$ לא הפיך, נקבל ש $1 = x + (1 - x)$ לא הפיך, סתירה.

   מצד שני, נניח שx לא הפיך גורר ש $1 - x$הפיך.

   יהיו a, b לא הפיכים. אם $a + b = u$ הפיך. אז $u^{-1}a + u^{-1}b = 1$. כלומר, $u^{-1}b = 1 - u^{-1}a$. אבל $u^{-1}b$ ו$u^{-1}a$ לא הפיכים. סתירה.

3. יהי $P \trianglelefteq R$ ראשוני שזר לS. הוכיחו ש$S^{-1}P$ ראשוני ב$S^{-1}R$.
יהיו $\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} \in S^{-1}P$. כלומר, $\frac{r \cdot r'}{s \cdot s'} \in S^{-1}P$. זה אומר שקיימים $x \in P, s'' \in S$ כך ש$\frac{x}{s''} = \frac{rr'}{ss'}$. מהגדרת יחס השקילות, $s''rr' = ss'x$ $x \in P$ ולכן $ss'x \in P$. זה אומר ש$s''rr' \in P$. מראשוניות P אחד מהם בP. מהנחה, $s'' \notin P$ לכן בה"כ $r \in P$. וזה אומר ש$\frac{r}{s} \in S^{-1}P$.

4. יהי $P \trianglelefteq S^{-1}R$ ראשוני. הוכיחו ש$P \cap R$ ראשוני בR.
יהיו $x, y \in R$ כך ש$xy \in P \cap R$. כלומר, $\frac{xy}{1} \in P$. אבל $\frac{xy}{1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1}$. מראשוניות P, בה"כ $\frac{x}{1} \in P$. מהגדרת $P \cap R$ נקבל ש$x \in P \cap R$.