בוחן אלגברה לינארית 83110

19.11.12

.1

(א) מצא את כל ה z־ים המרוכבים עבורם המשוואה הבאה מתקיימת: (10 נק')
$\bar{z}z + z = 3 - i$

(ב) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

i. הוכיחו כי AA^t מטריצה ריבועית (5 נק')

ii. הביעו את $trace(AA^t)$ באמצעות איברי המטריצה A (12 נק')

iii. נתון כי $trace(AA^t) = 0$. הוכיחו כי A היא מטריצת האפס (6 נק')

.2

(א) תהא A מטריצה ריבועית. באילו מקרים למערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ יש פתרון יחיד ובאילו יש אינסוף פתרונות? (13 נק').

(ב) מצא תנאי/תנאים על הפרמטרים b_1, b_2, b_3, b_4 (ממשיים) עבורם למערכת המשוואות (1) קיים פתרון יחיד (2) אינסוף פתרונות (3) אין פתרון (20 נק')

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = b_1 \\ 4x - 5y + 8z = b_2 \\ -3x + 3y + 3z = b_3 \\ x + y - 3z = b_4 \end{cases}$$

.3

(א) תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מטריצה.

i. מצא את ההופכית שלה (14 נק')

ii. הצג את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות (כתוב באופן מפורש את המטריצות) (6 נק')

(ב) יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB \neq 0$ מטריצה סקלארית. הוכח ש A, B הפיכות ומצא את ההופכיות. (13 נק')

בהצלחה!

פתרון:

.1

(א) נסמן $a, b \in \mathbb{R}$ $z = a + bi,$. נציב במשוואה ונקבל $a^2 + b^2 + a + bi = 3 - i$
לפי יחידות ההצגה נקבל
$b = -1,\ a^2 + b^2 + a = 3$ ומכאן ש $a^2 + a = 2$ $\Leftarrow$ $(a-1)(a+2) = 0$
$\Leftarrow$ $a =\in \{1, -2\}$.
לסיכום $z = 1 - i$ או $z = -2 - i$.

(ב) נתון $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

i. $\Leftarrow$ $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\Leftarrow$ $AA^t \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$

ii.
$$trace(AA^t) = \sum_{k=1}^{m} (AA^t)_{kk} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} A_{ks}(A^t)_{sk}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} A_{ks}A_{ks} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} (A_{ks})^2$$

iii. נתון $trace(AA^t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} (A_{ks})^2 = 0$
$\Leftarrow$לכל k, s כך ש $1 \le k \le m,\ 1 \le s \le n$ מתקיים $A_{ks} = 0$
כי סכום של ריבועים (ריבוע של מספרים) שווה אפס רק אם כל מחובר שווה 0 $\Leftarrow$ A מטריצת אפסים.

.2

(א) אם נניח ש־A הפיכה נוכל לכפול את המשוואה משמאל בהופכית של A ולקבל פתרון יחיד: $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.
אחרת, A לא הפיכה ולכן אחרי דירוג תהיה לה לפחות שורת אפסים אחת. מאחר וצד ימין של המשוואה הוא וקטור של אפסים לאחר הדירוג הוא נשאר וקטור של אפסים ולכן יהיו למשוואה אינסוף פתרונות.
לסיכום:
אם A הפיכה יש למערכת פתרון יחיד.
אחרת, למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ב) נתחיל מדירוג המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & b_2 \\ -3 & 3 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & -3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-4R_4\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ -3 & 3 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & -3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+3R_1\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ 0 & -3 & 18 & b_3+3b_1 \\ 1 & 1 & -3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_1\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ 0 & -3 & 18 & b_3+3b_1 \\ 0 & 3 & -8 & b_4-b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ 0 & -3 & 18 & b_3+3b_1 \\ 0 & 0 & 10 & b_4+b_3+2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ 0 & 0 & 34 & 3b_3+9b_1-b_2+4b_4 \\ 0 & 0 & 10 & b_4+b_3+2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{34R_4-10R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & -9 & 20 & b_2-4b_4 \\ 0 & 0 & 34 & 3b_3+9b_1-b_2+4b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -6b_4+4b_3-22b_1+10b_2 \end{pmatrix}$$

ולכן, אם $-6b_4+4b_3-22b_1+10b_2=0$ יש פתרון יחיד. אחרת, נקבל סתירה ולכן אין פתרון.

.3

(א) נדרג את $(A|I)$

i.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-R_3\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_2\to R_2]{\frac{1}{2}R_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

ii. נייצג את הפעולות בעזרת מטריצות אלמנטריות

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1 = A^{-1} \Leftarrow E_5E_4E_3E_2E_1A = I$$
$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1} = A \Leftarrow$$

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) נתון $AB \neq 0$ סקלארית. כלומר קיים סקלאר $\alpha \neq 0$ כך ש $AB = \alpha I$.
כעת מותר לחלק ב α ונקבל $\frac{1}{\alpha}(AB) = (\frac{1}{\alpha}A)B = A(\frac{1}{\alpha}B) = I$
(בתרגיל 3 הוכח כי $\beta(AB) = (\beta A)B = A(\beta B)$ עבור β סקלאר ו A, B מטריצות)
$\Leftarrow$ $A^{-1} = (\frac{1}{\alpha}B),\ B^{-1} = (\frac{1}{\alpha}A)$ כיוון שמצאנו את ההופכיות בפרט הוכחנו ש A, B הפיכות.