תירגול לינארית למורים בש תשפב סמסטר ב

27 באפריל 2022

לינארית

1. פתרו את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ 4x+z &= 3 \\ x-\frac{1}{2}y+z &= 1 \end{cases}$$

פתרון: נציג בעזרת מטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת שיש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון למערכת.

2. לכל k, קבעו כמה פתרונות יש למערכת הבא:

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ 4x+z &= 3 \\ x-\frac{1}{2}y+z &= k \end{cases}$$

פתרון: נציג בעזרת מטריצה ונדרג אותה (החישובים דומים להפליא לסעיף קודם):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & k \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & k \\ 0 & 2 & -3 & 3-4k \\ 0 & 2 & -3 & -2k \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & k \\ 0 & 2 & -3 & 3-4k \\ 0 & 0 & 0 & -3+2k \end{array}\right)$$

כעת, אם $-3+2k \neq 0$ (כלומר $k \neq 1.5$), יש לנו צורה מדורגת שיש בה שורת סתירה ולכן לא יהיה פתרון. אם $-3+2k=0$ (כלומר $k=1.5$) אז שוב יש לנו צורה מדורגת אבל הפעם בלי שורת סתירה ומשתנה חופשי (z) ולכן יהיו אינסוף פתרונות.
בואו נמצא את הפתרון הכללי במקרה ש $k=1.5$: הגענו לצורה מדורגת ונמשיך לדירוג קנוני-

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

איך נמשיך מפה? נציב $z=t$ ואז מהמשוואה השניה נקבל

$$y=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}t$$

ואז מהמשוואה הראשונה

$$x=\frac{1}{2}y-z+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}t\right)-t+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}t$$

את ההחלפה של y בשלב האחרון אפשר ל"חסוך" על ידי כך שנדרג קנונית -

$$\xrightarrow{R_1+\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

והגענו לצורה קנונית ואז נציב $z=t$ והמשוואת נקבל

$$y=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$$

$$x=-\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t+\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}t-\frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. עבור כל ערך של k, קבעו כמה פתרונות יש למערכת שמיוצגת על ידי המטריצה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

פתרון: נדרג ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-kR_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & (1-k)(1+k) & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & (1-k)(1+k) & 1-k & 1-k \end{array}\right)\xrightarrow{R_3-(1+k)R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k-(k+1)(k-1) & 1-k \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k-k^2+1 & 1-k \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(k^2+k-2\right) & 1-k \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 1-k \end{array}\right)$$

כעת, אם כל האיברים האדומים שונים מאפס נקבל מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. לכן נבדוק רק את המקרים בהם אחד מהאיברים האדומים מתאפס. זה קורה או ש $k=1$ או $k=-2$.

עבור $k=1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שיש לה אינסוף פתרונות כי היא מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי.

הפתרון שלה (לא בקשו בשאלה אבל נעשה בכל זאת) הוא: יש שני משתנים חופשיים, $y=t,z=s$ ואז

$$x=1-s-t$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} 1-s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ועבור $k=-2$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

שהיא מדורגת, עם שורת סתירה ולכן אין פתרון.
לסיכום: עבור $k\neq 1,-2$ יש פתרון יחיד, עבור $k=1$ יש אינסוף פתרון, עבור $k=-2$ אין פתרון.

4. עבור כל ערך של k, קבעו כמה פתרונות יש למערכת:

$$\begin{cases} 3x+y+kz & =0 \\ 6x+ky+(2k+1)\,z & =1 \\ 9x+3y+k^2z & =3k-3-3z \end{cases}$$

פתרון: נשים לב שזוהי אכן מערכת משוואות לינארית (נעביר אגף במשוואה השלישית) וגם נשים לב שהפרמטר k מופיע בריבוע אבל זה לא משנה.
נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & k & 0 \\ 6 & k & 2k+1 & 1 \\ 9 & 3 & k^2+3 & 3\,(k-1) \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{3} & 1 & k & 0 \\ 0 & \color{red}{k-2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{k^2-3k+3} & 3\,(k-1) \end{array}\right)$$

כעת, אם כל האיברים האדומים שונים מאפס, קיבלנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד.
נבדוק את המקרים שאחד מהאדומים מתאפס. זה קורה אם $k=2$ או $k^2-3k+3=0$ כלומר $k=2$ (למשוואה הריבועית אין פתרון). נציב $k=2$ ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת עם שורת סתירה ולכן אין פתרון. לסיכום: עבור $k\neq 2$ יש פתרון יחיד. עבור $k=2$ אין פתרון.

5. לכל ערך של k ושל t, קבעו כמה פתרונות יש למערכת המיוצגת על ידי המטריצה הבא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & t & k \\ k & 1 & k & k+kt & 1+k^2 \\ t & 0 & k+t & 1+t^2 & 4+k \\ t & 0 & t & k-tk+t^2 & k+1+kt \end{array}\right)$$

הערה: זה מייצג את המערכת

$$\begin{cases} x_1+0x_2+x_3+tx_4 & =k \\ kx_1+x_2+kx_3+k\,(1+t)\,x_4 & =1+k^2 \\ tx_1+0x_2+(k+t)\,x_3+\left(1+t^2\right)x_4 & =4+k \\ tx_1+0x_2+tx_3+\left(k-tk+k^2\right)x_4 & =k+1+kt \end{cases}$$

פתרון: נדרג לאט ובזהירות ונבדוק

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & t & k \\ k & 1 & k & k+kt & 1+k^2 \\ t & 0 & k+t & 1+t^2 & 4+k \\ t & 0 & t & k-tk+t^2 & k+1+kt \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-R_3]{R_2-kR_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & t & k \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ t & 0 & k+t & 1+t^2 & 4+k \\ 0 & 0 & -k & k-tk-1 & -3+kt \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-tR_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & t & k \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 4+k-tk \\ 0 & 0 & -k & k-tk-1 & -3+kt \end{array}\right) \xrightarrow{R_4+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & t & k \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 4+k-tk \\ 0 & 0 & 0 & k-tk & 1+k \end{array}\right)$$

כעת: אם האיברים האדומים שונים מאפס, נקבל צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד. נבדוק את המקרים בהם אחד מהאדומים מתאפס. זה קורה אם $k=0$ או $k-tk=0$ (כלומר $k(1-t)=0$ כלומר $k=0$ או $t=1$).

עבור $k=0$: נקבל שהשורה הרביעית היא שורת סתירה $1=0$. ולכן לא יהיה פתרון.

עבור $t=1$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+k \end{array}\right)$$

ונחלק שוב לפי k (כאשר $k=0$ כבר טיפלנו קודם). אם כל הירוקים שונים מאפס, נקבל צורה מדורגת שיש בה שורת סתירה (הרביעית!) ולכן לא יהיה פתרון במקרה זה. נבדוק את המקרים בהם אחד מהירוקים מתאפס. זה קורה אם $k=0$ (שראינו כבר שלא יהיה פתרון) או $k=-1$ שבו נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (המשתנה הרביעי) ולכן במקרה זה יהיה אינוסף פתרונות.

לסיכום: עבור $k=0$ וכל t נקבל אין פתרון. עבור $t=1, k\neq -1$ נקבל אין פתרון. עבור $t=1, k=-1$ נקבל אינסוף פתרונות. ובכל מקרה אחר נקבל פתרון יחיד.

6. כפל מטריצות: הכפילו את המטריצות הבאות AB, אם אפשר

(א)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\left[A\in\mathbb{R}^{3\times 2}, B\in\mathbb{R}^{2\times 4}\right] \Rightarrow AB\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 13 & -15 & 9 \\ 7 & -11 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

(ב)

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: AB לא מוגדר במקרה זה.

(ג)

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&-2&3&0\end{pmatrix}$$

פתרון: אפשר להכפיל: השורה הראשונה של הכפל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&-2&3&0\end{pmatrix}$$

היא

$$1\cdot\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\end{pmatrix}$$

באופן דומה, השורה השניה של הכפל AB הוא

$$0\cdot\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&3&0\end{pmatrix}$$

והשורה השלישית של הכפל AB תהיה

$$1\cdot\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&3\end{pmatrix}$$

ולכן בסה"כ

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&-2&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&-2&3&0\\-1&1&0&3\end{pmatrix}$$

(ד) ברעיון דומה, מה הכפל

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&2&3&4\\1&-2&3&0\end{pmatrix}$$

מה הכפל AB?

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&0&1\end{pmatrix}}_{3\times3}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&2&3&4\\1&-2&3&0\end{pmatrix}}_{3\times4}=\underbrace{\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&2&3&4\\-2\alpha+1&3\alpha-2&-3\alpha+3&3\alpha\end{pmatrix}}_{3\times4}$$

ולכן כפל במטריצה $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\alpha&0&1\end{pmatrix}$ היא בדיוק כמו הפעולה

$$\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&2&3&4\\1&-2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+\alpha R_1}\begin{pmatrix}-2&3&-3&3\\1&2&3&4\\-2\alpha+1&3\alpha-2&-3\alpha+3&3\alpha\end{pmatrix}$$

מה הפואנטה? שאפשר לקודד כל פעולת דירוג על ידי כפל במטריצה ומשמה לפתח תיאוריה יפה.

7. עוד שימוש לכפל מטריצות: נניח שיש לנו את הבעיה הבאה: יש לנו שני עולמות, כדור הארץ והירח. בכל שנה מספר האנשים בכדור הארץ גדל ב 5% ובירח ב 2% וגם יש מעבר בין העולמות, בכל שנה עוברים 20% מתושבי הירח לכדור הארץ ו 15% מכדור הארץ לירח. השאלה היא - כמה אנשים יהיו בכל אחד מהעולמות עוד 50שנה? נניח שבשנת 0 יש 100 אנשים בכדור הארץ ו 50 בירח.
פתרון: נייצג בעזרת מטריצות את הבעיה. יש לנו וקטור התחלה

$$v = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

מה יקרה אחרי שנה?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 100 \cdot 1.05 + 50 \cdot 0.2 \\ 50 \cdot 1.02 + 100 \cdot 0.15 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.05 & 0.2 \\ 0.15 & 1.02 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.2 \\ 0.15 & 1.02 \end{pmatrix}$ וקיבלנו שאם המצב בשנה מסוימת הוא v אז אחרי שנה המצב הוא Av. מה יקרה אחרי שנתיים? המצב אחרי שנה הוא Av ולכן שנה אחר כך הוא יהיה $A \cdot Av = A^2 v$ ובאופן דומה, אחרי n שנים המצב יהיה $A^n v$

8. סדרת פיבונאצ'י היא סדרת המספרים F_n שמתחילה ב $F_0 = 0, F_1 = 1$ ואז הנוסחא הרקורסיבית

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

כלומר כל איבר הוא סכום שני הקודמים לו. תחילת הסדרה היא

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

האם אפשר למצוא נוסחא ל F_n בצורה מפורשת? אפשר בעזרת כפל של מטריצות. רוצים מטריצה שמעבירה אותם משלב מסוים בסדרה לשלב העוקב לו. עושים זאת כך:

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ נקבל

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

ובאופן כללי:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

ויש כלים לחשב את A^n ואז מכפילים $A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ והמספר התחתון הוא F_n!

חדוא

1. יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות המקיימות $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to} g(x)$, חשבו את הגבול הבא (הביעו בעזרת f, g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{f(x)}^{g(x)} \sin(t^2)\mathrm{dt}}{x^3}$$

פתרון: לפנינו מקרה של $\frac{0}{0}$ ונשתמש בלופיטל. למה זה המקרה? כי $x^3 \to 0$ כאשר $x \to 0$ ו

$$\lim_{x\to 0} \int_{f(x)}^{g(x)} \sin(t^2)\mathrm{dt} = \int_a^a \sin(t^2)\mathrm{dt} = 0$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{f(x)}^{g(x)} \sin(t^2)\mathrm{dt}}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}, \text{לופיטל}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[\int_{f(x)}^{g(x)} \sin(t^2)\mathrm{dt}\right]'}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(g(x)^2)\cdot g'(x) - \sin(f(x)^2)\cdot f'(x)}{3x^2}$$

ועבור $f(x) = -x, g(x) = x^2$ נקבל

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)\cdot 2x - \sin(x^2)\cdot(-1)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)\cdot 2x + \sin(x^2)}{3x^2}$$

נפצל ונחשב שני גבולות יותר פשוטים:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{1}{3} \cdot 1$$

אם לא זוכרים אפשר להשתמש בלופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{3\cdot 2x} = \frac{1}{3}$$

והאינטגל השני הוא, בעזרת לופיטל

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)\cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)\cdot 2}{3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4)\cdot 2\cdot 4x^3}{3} = 0$$

או כמו מקודם, אם זוכרים, אפשר לחשב כך:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)\cdot 2}{3x} = \lim_{x\to 0} x^3 \cdot \frac{\sin(x^4)\cdot 2}{3x^4} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

לכן ליסכומו של תרגיל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{f(x)}^{g(x)} \sin(t^2)\mathrm{dt}}{x^3} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$