המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 - 01/05 – סמסטר ב' תשע"ה

מבחן מועד א'

יום ד', י"ג באב תשע"ה, 29.7.15

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק. מתרגלים: תמר נחשוני, אלעד עטייא, מני שלוסברג.

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.
ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
ג. הניקוד על שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, אך הציון הסופי לא יעבור את 100.
ד. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.
ה. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

1. יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי, ותהי $A \subseteq X$ סגורה. הראה ש A קומפקטי.

2. הראה שכל מרחב טופולוגי קשיר מסילתית הוא קשיר.

3. הראה שכל מרחב מטרי הוא T_4 .

4. יהי X מרחב טופולוגי. תהי $U \subseteq X$ פתוחה, ותהי $A \subseteq X$ צפופה.

   א. הראה ש $U \subseteq \overline{A \cap U}$.

   ב. הסק ש $\overline{U} = \overline{A \cap U}$.

5. נביט ב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הרגילה ובפונקציית הערך השלם $f:\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
(כלומר עבור $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ מוגדר להיות השלם המקסימלי n המקיים $n \le x$).
נסמן ב T את הטופולוגיה על $\mathbb{Z}$ שעבורה f היא העתקת מנה.
הראה ש $T = \{\varnothing, \mathbb{Z}\} \cup \{(-\infty, m] \cap \mathbb{Z} \ : \ m \in \mathbb{Z}\}$.

שאלת בונוס (5 נקודות):

יהי (M,d) מרחב מטרי. הראה שיש נקודות $a,b \in M$ כך ש

$$d(a,b) = \sup_{x,y \in M} d(x,y)$$

בהצלחה!

המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 88 - 222 - 01/05 – סמסטר ב' תשע"ה

מבחן מועד ב'

יום ה', כ"ו באלול תשע"ה, 10.9.15

מרצים: מיכאל מגרל, טל נוביק. מתרגלים: תמר נחשוני, אלעד עטייא, מני שלוסברג.

הנחיות:

א. אין להשתמש בכל חומר עזר.
ב. עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
ג. הניקוד על שאלת הבונוס הוא 5 נקודות, אך הציון הסופי לא יעבור את 100.
ד. אנא רשום בפינה השמאלית העליונה של כריכת המחברת, מעל המילים "מדור בחינות", את מספרי השאלות שבחרת.
ה. משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

1. יהי X מרחב טופולוגי **קומפקטי** ו Y מרחב טופולוגי כלשהו. נניח שקיימת פונקציה רציפה $f: X \to Y$ שהיא **על** Y. הראה שגם Y קומפקטי.

2. הראה שכל הקטעים הפתוחים למיניהם ב $\mathbb{R}$ הומאומורפיים זה לזה, כאשר הקטעים הפתוחים הם כל הקבוצות מהצורה (a,b), (a,∞), $(-\infty,a)$, $(-\infty,\infty)$

3. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, תהי $f: X \to Y$ רציפה, ותהי $B \subseteq Y$ תת קבוצה המקיימת ש $f(X) \subseteq B$. תהי f' הפונקציה המתקבלת מ f ע"י צמצום הטווח ל B (כלומר $f': X \to B$ ומקיימת $f'(x) = f(x)$ לכל $x \in X$). הראה ש f' רציפה.

4. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$. תהי $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ הפונקציה האופיינית של A כלומר הפונקציה המוגדרת כך: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

   א. עבור $x \in X$ הראה ש χ_A רציפה ב x אם"ם $x \notin \partial A$, כאשר ∂A מוגדר כך:
   $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$ (הסגור של A פחות הפנים של A).

   ב. הראה ש χ_A רציפה אם"ם $\partial A = \emptyset$ אם"ם A גם פתוחה וגם סגורה.

5. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}^2$ המתקבל מיחס השקילות הבא:
   $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ אם $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.
   הראה ש X הומאומורפי ל $\mathbb{R}$.

שאלת בונוס (5 נקודות): עבור מרחבים טופולוגיים X,Y והעתקה רציפה $f: X \to Y$, נגדיר את $K \subseteq X \times Y$ כך: $K = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ y = f(x)\}$ (K נקראת הגרף של f).
הראה שאם Y הוא האוסדורף, אז K סגורה ב $X \times Y$.

בהצלחה!