פתרון תרגיל 13 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

14 ביוני 2016

1. מהו המשטח M? מדובר בשני אליפסואידים זרים:

$$\mathbf{S}_1 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$$

$$\mathbf{S}_2 : (x-10)^2 + y^2 + 2z^2 = 1$$

עקמומיות גאוס הכוללת של כל אחד מהם היא 4π, כי הג'ינוס של כל אחד מהם הוא $g=0$ (אין להם חורים). לכן בסה"כ:

$$\iint\limits_{M} KdS = \iint\limits_{\mathbf{S}_1} KdS + \iint\limits_{\mathbf{S}_2} KdS = 8\pi$$

2. לא נוכל להשתמש במשפט גאוס בונה, ולכן נחשב ישירות.

(א) המשטח הוא:

$$r(\theta, \phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$$

כפי שראינו בעבר, המטריקה היא:

$$G = \cosh^2\phi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ועקמומיות גאוס היא:

$$K = -\frac{1}{\cosh^4\phi}$$

אלמנט השטח של המשטח הוא:

$$dS = \sqrt{\det G} d\theta d\phi = \cosh^2\phi d\theta d\phi$$

התחום הוא:

$$(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$$

ולכן:

$$\iint KdS=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{\cosh^{4}\phi}\cosh^{2}\phi d\theta d\phi=-2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh^{2}\phi}d\phi=$$

$$=-2\pi\cdot\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\tanh b-\tanh\left(-b\right)\right)=$$

נזכור ש: $\tanh b=\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}+e^{-b}}$, ונקבל:

$$=-2\pi\cdot\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{2\left(e^{b}-e^{-b}\right)}{e^{b}+e^{-b}}\right)=-4\pi\cdot\lim_{b\longrightarrow\infty}\left(\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}\right)=-4\pi$$

(ב) המשטח הוא:

$$r\left(\theta,\phi\right)=\left(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,\phi^{2}\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_{\theta}=\left(-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta,0\right),r_{\phi}=\left(\cos\theta,\sin\theta,2\phi\right)$$

המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix}\phi^{2} & 0\\ 0 & 1+4\phi^{2}\end{pmatrix}$$

נחשב את הנורמל:

$$r_{\theta}\times r_{\phi}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \sin\theta & 2\phi\end{vmatrix}=\left(2\phi^{2}\cos\theta,2\phi^{2}\sin\theta,-\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\left\Vert r_{\theta}\times r_{\phi}\right\Vert =\sqrt{4\phi^{4}\cos^{2}\theta+4\phi^{4}\sin^{2}\theta+\phi^{2}}=\phi\sqrt{4\phi^{2}+1}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{r_{\theta}\times r_{\phi}}{\left\Vert r_{\theta}\times r_{\phi}\right\Vert }=\frac{1}{\sqrt{4\phi^{2}+1}}\left(2\phi\cos\theta,2\phi\sin\theta,-1\right)$$

הנגזרות השניות הן:

$$r_{\theta\theta} = (-\phi\cos\theta, -\phi\sin\theta, 0)$$

$$r_{\theta\phi} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$r_{\phi\phi} = (0, 0, 2)$$

נחשב את התבנית היסודית השנייה:

$$L_{11} = r_{\theta\theta} \cdot \vec{n} = -\frac{2\phi^2}{\sqrt{4\phi^2+1}}$$

$$L_{12} = L_{21} = r_{\theta\phi} \cdot \vec{n} = 0$$

$$L_{22} = r_{\phi\phi} \cdot \vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{4\phi^2+1}}$$

כלומר:

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{2\phi^2}{\sqrt{4\phi^2+1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4\phi^2+1}} \end{pmatrix}$$

כעת:

$$K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{\frac{4\phi^2}{4\phi^2+1}}{\phi^2\left(4\phi^2+1\right)} = \frac{4}{\left(4\phi^2+1\right)^2}$$

אלמנט השטח הוא:

$$dS = \sqrt{\det G}d\theta d\phi = \phi\sqrt{4\phi^2+1}d\theta d\phi$$

התחום הוא:

$$(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty)$$

ולכן:

$$\iint K dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{4}{\left(4\phi^2+1\right)^2} \cdot \phi\sqrt{4\phi^2+1}d\theta d\phi = 8\pi \cdot \int_0^{\infty} \frac{\phi}{\left(4\phi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} d\phi =$$

$$= 2\pi \cdot \left. \frac{1}{\sqrt{4\phi^2+1}} \right|_{\phi=0}^{\phi=\infty} = 2\pi$$

כמו שאנו רואים (בהנחה שלא התבלבלנו), זו לא כפולה של 4π.

3. כפי שראינו בפרק על עקומות, אלו דלתואידה ואסטרואידה.
שתיהן מקיפות את הראשית פעם אחת כאשר $0 \le t \le 2\pi$, ולכן הארגומנט שלהן (ששווה לעקמומיות הכוללת) הוא 2π.

4. שימו לב שהמשטח אינו בהכרח אוריינטבילי.
נסמן את המשטח ב־M. מכיוון שהוא קומפקטי, קיימת $p_0 \in M$ שמרחקה מהראשית מקסימלי (פונקציית הנורמה $\|\|$היא רציפה כהרכבת רציפות ולפי ויירשטראס מקבלת מקסימום בקבוצה הקומפקטית M). נסמן ב־S_0 את הספירה שמרכזה בראשית ורדיוסה הוא $\|p_0\|$.
כעת, $p_0 \in S_0 \cap M$, ו־M מוכל בכדור שמרכזו בראשית ורדיוסו הוא $\|p_0\|$. המשטח נושק לספירה בנקודה p_0 ולכן יש להם את אותה העקמומיות בנקודה ־ ובספירה כל נקודה היא אליפטית.
ביתר פירוט, הנורמל בנקודה p_0 הוא: $\vec{n} = \frac{p_0}{\|p_0\|}$. תהי β עקומה במהירות יחידה על המשטח כך ש: $\beta(0) = p_0$.
הפונקציה $s \mapsto \|\beta(s)\|^2$ מקבלת מקסימום ב־$s = 0$ (כי הרי p_0 זו הנקודה עם הנורמה המקסימלית) ולכן הנגזרת השנייה לא חיובית.
נגזור ונקבל:

$$k_n \le -\frac{1}{\|p_0\|}$$

כעת, הסתכלנו על עקומה כלשהי, ולכן לכל העקמומיות של עקומות שעוברות בנקודה אותו הסימן, ולכן K חיובית, כלומר הנקודה אליפטית.
מכיוון ש־$K(p_0) > 0$ ו־K רציפה, יש סביבה של p_0 שבה כל הנקודות אליפטיות.

5. מכיוון ש: $g > 0$, לפי משפט גאוס בונה:

$$\iint\limits_M K dS \le 0$$

כעת, לפי השאלה הקודמת קיימות במשטח נקודות אליפטיות, שבהן $K > 0$.
מכיוון שהעקמומיות הכוללת אינה חיובית, קיימות בהכרח נקודות בהן $K < 0$, כלומר נקודות היפרבוליות.
מכיוון שהעקמומיות K היא רציפה, לפי משפט ערך הביניים קיימות נקודות בהן $K = 0$.