

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin(2xe^x)) \cos(x)}{1 - \cos(x)} \quad \text{א.}$$

2. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^3}} \quad \text{א.}$$

3. תהי  $a_n$  סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה  $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$ , ונתון כי  $a_1 > 1$ .

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית עולה.

ב. חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

4. תהי  $f$  פונקציה שאינה רציפה ב  $x = 0$ .

א. הוכיחו/הפריכו: אם  $f + g$  רציפה ב  $x = 0$ , אזי  $g$  אינה רציפה ב  $x = 0$ .

ב. הוכיחו/הפריכו: אם  $f \cdot g$  רציפה ב  $x = 0$ , אזי  $g$  אינה רציפה ב  $x = 0$ .

5. תהי פונקציה  $f$  גזירה בכל  $\mathbb{R}$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f(x) \geq x$ .

א. הוכיחו כי לכל  $a < 1$  קיימת נקודה עברה  $f'(x) > a$ .

(רמז: הביטו ב  $f(x) - ax$ .)

ב. הוכיחו/הפריכו: קיימת נקודה עברה  $f'(x) \geq 1$ .