פתרון מועד ב - חדו"א 1ת

סמסטר אביב - תשע"א

שאלה 1:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית. נתון כי יש לה תת־סדרה שהיא סדרה מתכנסת (במובן הרגיל). הראו כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרגיל.

פתרון:

נניח בה"כ כי a_n מונוטונית עולה. אם היא חסומה מלעיל אז סיימנו, לכן נניח שהיא לא חסומה מלעיל.

על פי ההגדרה לכל $M>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n > M$. נתון כי קיימת סדרה $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$, לכן קיים k_0 טבעי, כך שלכל $k>k_0$ מתקיים $a_{n_k} < L+1$.

נבחר $M = L+1$ ונקבל שעבור כל k כך ש $N < n_k$ מתקיים $a_{n_k} > L+1$ בפרט עבור $k > k_0$, וזאת סתירה.

לכן a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת לגבול סופי.

שאלה 2:

תהי $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f\left(f(\sqrt{2})\right)=\sqrt{2}$. הראו כי קיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש - $f(x_0)=x_0$.

פתרון:

נגדיר $g(x) = f(x) - x$, זאת פונקציה רציפה כהפרש של רציפות, ומתקיים:

$$g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) - \sqrt{2},\ \ g\left(f(\sqrt{2})\right) = f\left(f(\sqrt{2})\right) - \sqrt{2} = -g(\sqrt{2})$$

אם $g(\sqrt{2}) = g\left(f(\sqrt{2})\right)$ אז סיימנו, אחרת $g(\sqrt{2})\cdot g\left(f(\sqrt{2})\right) = -\left(g(\sqrt{2})\right)^2 < 0$ ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה x_0 בין $\sqrt{2}$ ל $f(\sqrt{2})$ כך ש $g(x_0)=0$.

שאלה 3:

א) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{-\frac{1}{n}}\right)^{\sin\frac{1}{n}}$.

ב) חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x+\cos x\right)^{e^x-1}$.

פתרון:

א) נסמן $x=\frac{1}{n}$ אז אם קיים הגבול $\lim_{x\to 0^+}\left(e^x-e^{-x}\right)^{\sin x}$ אז על פי משפט היינה גם הגבול המקורי קיים ושווה לו.

$$\left(e^x-e^{-x}\right)^{\sin x}=e^{\sin x\ln\left(e^x-e^{-x}\right)}$$

נתבונן בגבול $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln\left(e^x-e^{-x}\right)}{\frac{1}{\sin x}}=\sin x\ln\left(e^x-e^{-x}\right)$ המונה והמכנה הן פונקציות גזירות בסביבה הימנית של אפס, וזהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן נשתמש במשפט לופיטל:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{-\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{e^x-e^{-x}}$$

ליד אפס מתקיים: $\sin^2 x=(x+R_1(x))^2=x^2+2R_1x+R_1^2$, $e^x-e^{-x}=2x+\bar{R}_1(x)$ ולכן:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{-\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^x+e^{-x}}{-\cos x}\cdot\frac{x^2+2R_1x+R_1^2}{2x+\bar{R}_1(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{-\cos x}\cdot\frac{x+2R_1+\frac{R_1^2}{x}}{2+\frac{\bar{R}_1(x)}{x}}\xrightarrow{x\to 0^+}0$$

לכן גם $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to 0^+}0$ ומכיוון e^x פונקציה רציפה, אזי:

$$e^{\sin x\ln\left(e^x-e^{-x}\right)}\xrightarrow{x\to 0^+}e^0=1$$

* הערה: $\frac{R_1(x)}{x}\xrightarrow{x\to 0^+}0$ כי זאת שארית של פיתוח לפולינום טיילור.

ב) נסמן $f(x)=\sin x+\cos x$, $g(x)=e^x-1$, שתי הפונקציות הנ"ל רציפות ושואפות ל - 1 כאשר $x\to 0^+$, כמו כן גם פונקצית החזקה היא רציפה ולכן:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x+\cos x\right)^{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}f(x)^{g(x)}=1^1=1$$

שאלה 4:

האם הטור $\sqrt{n^4-8}$ $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sqrt{n^4-8}$ מתכנס?

פתרון:

נשווה עם הטור המתבדר: $\sum\frac{1}{n\ln n}$

$$\frac{\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sqrt{n^4-8}}{\frac{1}{n\ln n}}=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sqrt{n^4-8}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$$

מכיוון שעבור n מספיק גדול, מתקיים: $e^{\frac{1}{n^2}}-1=\frac{1}{n^2}+R_1(\frac{1}{n^2})$ ולכן:

$$\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\sqrt{n^4-8}=\frac{\sqrt{n^4-8}}{n^2}+R_1\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{n^4-8}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}1+0=1$$

* הערה: $\frac{R_1\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ לכן $R_1\left(\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{n^4-8}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

שאלה 5:

תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נתון כי $f(1)=\frac{1}{2}$, הראו כי קיימת סביבה של $x=1$ אשר בה הפונקציה $G(x)=\int_0^{x^5}f(t)dt$ היא מונוטונית עולה ממש.

פתרון:

$f(1)=\frac{1}{2}$ ו $f(x)$ רציפה, ולכן קיימת סביבה U של $x=1$ כך $f(x)>0$ לכל $x\in U$, ולכן על פי המשפט היסודי, $G(x)$ גזירה ב U, ומתקיים: $G'(x)=5x^4f(x^5)$.

x^5 רציפה, ו $f(x)$ רציפה, ולכן ההרכבה $G'(x)=5x^4f(x^5)$ רציפה. $G'(1)=5\cdot f(1)=\frac{5}{2}>0$ ומכיוון ש $G'(x)$ רציפה, אזי קיימת סביבה של 1 שבה $G'(x)>0$,

לכן באותה סביבה $G(x)$ מונוטונית עולה ממש.