תרגול 1-אושרית

לוגיקה מתמטית

פרטים שימושיים:

- אושרית שטוסל
- מייל- oshritvig@gmail.com
- שיעורי בית- הגשת תרגילים בxi מדי שבוע.
- יתקיים בוחן אמצע.

אטומים, פסוקים וקשרים:

הגד' לא פורמלית (למתן אינטואיציה): כמו שבשפה העברית מורכבת ממשפטים, המקבילה בשפה המתמטית נקראת פסוק. חלק מאבני הבניין של הפסוקים הם - אטומים.

נבחר - ע' דוג': הפסוק ← "שנת הלימודים החלה ויש 5 קורסים בשנה א'." מורכב מ-2 אטומים.

אטום I: "שנת הלימודים החלה"

אטום II: "יש 5 קורסים בשנה א'"

שני האטומים מקושרים ע"י החיבור ו'.

סיכום קצר:

1. אטומים - יש תוכן מסוים.
2. פסוקים - יש תוכן מורכב. מורכבות מאטומים + קשרים.
3. אטומים - יכולים לקבל ערך אמת יסומן ב-T וערך שקר יסומן ב-F
4. פסוקים - יקבלו ערכי T ! F לפי חישוב ערכי האמת והשקר של האטומים ועם הקשרים.

קשרים:

קשרים: הגדרה: יהיו A,B אטומים (או פסוקים) היכולים להיות אמת T או שקר F, אזי הקשרים הבאים מוגדרים ע"פ טבלאות האמת שלהם.

* גרירה - $A \to B$
* "או" - $A \vee B$
* "וגם" - $A \wedge B$
* שלילה - $\neg A$

מוגדרים ע"י טבלת האמת הבאה -

לפחות 1 אמת ($A \vee B$) ; שניהם אמת ($A \wedge B$)

A	B	$A \to B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T

שקר גורר כל דבר ($A \to B$)

קשרים:

קשרים: הגדרה: יהיו A,B אטומים (או פסוקים) היכולים להיות אמת T או שקר F, אזי הקשרים הבאים מוגדרים ע"פ טבלאות האמת שלהם.

* גרירה – $A \rightarrow B$
* "או" – $A \vee B$
* "וגם" – $A \wedge B$
* שלילה – $\neg A$

מוגדרים ע"י טבלת האמת הבאה –

A	B	$\underbrace{A \rightarrow B}_{\text{שקר גורר כל דבר}}$	$\overbrace{A \vee B}^{\text{לפחות 1 אמת}}$	$\overbrace{A \wedge B}^{\text{שניהם אמת}}$	$\neg A$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T

הגדרה: קשר נוסף שימושי $\leftrightarrow$ גרירה דו כיוונית (יקרא – "אם ורק אם")

מוגדר באופן הבא: $A \leftrightarrow B : (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

דוג' מילולית:

1. $\underbrace{\text{3 הוא מס' ראשוני}}_{T}$ או $\underbrace{\text{5 הוא מס' ראשוני}}_{T}$. ⇐ הפסוק יקבל ערך T.

2. $\underbrace{\text{3 הוא מס' ראשוני}}_{T}$ או $\underbrace{\text{4 הוא מס' ראשוני}}_{F}$ ⇐ הפסוק יקבל ערך T

הדגמה:

נוש': המרת הדיון להצגת ניסוח פורמלי.

דוג': נבין את המשפט: "אם יש לבקשה השלמה חופפת לקורס אז-(הוא) מתקבל"

פתרון: נגדיר $A=$ יש לבקשה השלמה חופפת לקורס $B=$ הקורס מתקבל

המשפט אומר - $A \rightarrow B$

שימו ♡ - לבקשה השלמה חופפת לקורס - תנאי מספיק לכך שהקורס מתקבל. אבל (לא) תנאי הכרחי כי יתכן ל...
שהקורס יתקבל מסיבה אחרת.

הצרינו:

תרגילים:

1. למדתי היטב למבחן גוף של פיזיק ונכשלתי בו.

תרגילים:

1. למדתי היטב למבחן ועל אף כן נכשלתי בו.

פתרון: נסמן- A= למדתי היטב למבחן B= נכשלתי במבחן. **הצרנה:** $A \wedge B$

② הצרן - "כאשר אני עייף ורעב, אני נעשה עצבני, או שאני הולך לישון. אבל אם אני עצבני ולא עייף אז - אני רעב."

פתרון: דרך ראשונה - נסמן את כל הפסוקים באותיות.

A = אני עייף B = אני רעב C = אני עצבני

D = אני הולך לישון

הצרנה:

$$[(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \wedge [(C \wedge \neg A) \rightarrow B]$$

טאוטולוגיות:

הגדרה: טאוטולוגיה הינה ביטוי שנכון תמיד ללא תלות בערכים שמציבים בו (במילים פשוטות- כל העמודות של הטבלה המתאימה יהיו לכל הגובה T.)

דוגמה: (לטאוטולוגיה) $A \vee \neg A$.

נבדוק בטבלת אמת:

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
T	F	T
F	T	T

אכן- טאוטולוגיה ✓

הגדרה: נאמר שביטוי A שקול טאוטולוגית לביטוי B (ונסמן $A \equiv B$)
אם הביטוי $A \leftrightarrow B$ הינו- טאוטולוגיה.
(קורא "אם"ם") ← מימין

תרגיל: הוכח באמצעות טבלאות אמת שניתן להציג את הקשרים $\rightarrow$, $\wedge$ ע"י $\vee$, $\neg$.

(כאמור)

תרגיל: הוכח באמצעות טבלאות אמת שניתן להציג את הקשרים '→', '∧' ע"י $\neg$, $\vee$.

פתרון: טענה 1: $A \to B \equiv \neg A \vee B$

נראה כאן.

טענה 2: $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$

תרגיל בית

A	$\neg A$	B	$A \to B$	$\neg A \vee B$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T

שווי ערכים

תכונות הקשרים: לכל 3 פסוקים A, B, C מתקיים ש-

1. קיבוציות - $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ [illegible] (וגם) ← $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

2. חילופיות - [illegible] $A \vee B \equiv B \vee A$ (וגם) ← $A \wedge B \equiv B \wedge A$

3. פילוג - (בין פעולות "או" "וגם":) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

4. כללי דה מורגן - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$; $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

תרגיל: האם המשפטים הבאים שקולים:

א. אם אייל שמח אז- עינב צוחקת, ואם עינב לא צוחקת אז- אייל לא שמח.

ב. אייל שמח אם ורק אם עינב צוחקת.

<u>תרגיל:</u> האם המשפטים הבאים שקולים:

א. אם אייל שמח אז לאה צוחקת, ואם לאה לא צוחקת אז אייל לא שמח.

ב. אייל שמח אם ורק אם לאה צוחקת.

<u>פתרון:</u> נבצע הצרנה של המשפטים: A = אייל שמח, B = לאה צוחקת.

$\boxed{\text{הצרנה א}}$ $(A\to B)\wedge(\neg B\to\neg A)$

$\boxed{\text{הצרנה ב}}$ $A\leftrightarrow B$

<u>נעשה טבלת אמת</u>

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A\to B$	$\neg B\to\neg A$	$(A\to B)\wedge(\neg B\to\neg A)$	$A\leftrightarrow B$
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T

<u>תשובה:</u> $\boxed{\text{לא שקולים}}$

מסקנה חשובה מהתרגיל: נשים לב ש $A\to B\equiv\neg B\to\neg A$ שקולות. זו נקראת contra-positive

טענת גרירה: סוג זה של טענה נפוץ מאוד במתמטיקה. משמעותו: אם (משהו) אז- (משהו)

לדוגמה: אם אומרים לכם שיש טענת גרירה נכונה לדוג'- שאלת הוכח/הפרך במבחן.

(שורה 1 של הטבלה) 1 אם הטענה נכונה כדאי להוכיח אותה ע"י כך שמראים שאם A נכון אז B נכון. כלומר- נניח A נכון ונראה B נכון.

(שורה 2 של הטבלה) 2 אם הטענה אינה נכונה אז כדאי למצוא דוג' שמפריכה אותה. דוג' מפריכה היא דוג' עבורה A נכון ו- B לא נכון.

טבלת אמת:

A	¬A	B	¬B	A→B
T	F	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T

תרגיל:

תרגיל: הסק מ-2 הנתונים: א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.
ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.
ניתן להסיק: אם לא מנגן בפסנתר אז אני מנגן בתופים.

תרגיל: הסק מ-2 הנתונים: א. אם אני מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בתופים ובפסנתר יחד.
ב. אם אני לא מנגן בחצוצרה אז אני לא מנגן בפסנתר.
ניתן להסיק: אם לא מנגן בפסנתר אז אני מנגן בתופים.

פתרון:

הפרכה

תזכורת:

טענה כללית סוג זה של טענה נפוץ מאוד במתמטיקה. משמעותה: אם (משהו) אז (משהו)
לדוגמה כאן אומרים לנו שאם טענה הגרירה נכונה לדוג' - שאלה הנחה/הפסק במדרון.
(שורה 1 של הטבלה) 1 אם הטענה נכונה כדאי להוכיח אותה ע"י שמוצאים שאם A נכון אז B נכון. כלומר - נניח A נכון ונוכיח B נכון.
(שורה 2 של הטבלה) 2 אם הטענה אינה נכונה אז כדאי למצוא דוג' שמפריכה אותה. דוג' מפריכה היא דוג' עבורה A נכון ו- B לא נכון.

אפשר להביא מקרה כך שהנתונים א + ב מתקיימים כלומר יקבלו ערך T אבל המסקנה לא מתקיימת. לא מנגן בכלום: א מתקיים כי שניהם צריך 3 דבר. ב מתקיים כי 2 חלקי הגרירה הם T.
אבל המסקנה לא מתקיימת: אני לא מנגן בפסנתר $\rightarrow$ אני מנגן בתופים $\equiv F$
T F

הכרחי ומספיק:

1. B תנאי הכרחי ל-A: $A \to B$ נסמן. (לפעמים יותר קל לחשוב על זה בשלילה A ו-B)
2. B תנאי מספיק ל-A: $B \to A$ נסמן.
3. B תנאי הכרחי ומספיק ל-A: $A \leftrightarrow B$ נסמן.

תרגיל

השלם את המשפט הבא: כדי שירד גשם ______ שיהיו עננים בשמים. לכן אם נסמן ע"י "יש עננים בשמים = A", "יורד גשם = B" נקבל "B____A".

תרגיל

השלם את המשפט הבא: כניסת המורה לכיתה הוא תנאי ______ שיהיה שקט בכיתה. לכן אם נסמן ע"י "כניסת המורה= A", "שקט בכיתה = B" נקבל "B____A".

הכרחי ומספיק:

1. B תנאי הכרחי ל-A: $A \to B$ נסמן. (לפעמים יותר קל לחשוב על זה השלילה A גורר B)
2. B תנאי מספיק ל-A: $B \to A$ נסמן.
3. B תנאי הכרחי ומספיק ל-A: $A \leftrightarrow B$ נסמן.

תרגיל

השלם את המשפט הבא: כדי שירד גשם ______ שיהיו עננים בשמים. לכן אם נסמן ע"י "יש עננים בשמים = A", "יורד גשם = B" נקבל "B____A".

פיתרון: הכרחי, $\Leftarrow$

תרגיל

השלם את המשפט הבא: כניסת המורה לכיתה הוא תנאי ______ שיהיה שקט בכיתה. לכן אם נסמן ע"י "כניסת המורה= A", "שקט בכיתה = B" נקבל "B____A".

פיתרון: מספיק, $\Rightarrow$

קיצור שימושי: נניח בשלילה

3 דרכי הוכחה:

(א) הוכחה בשלילה - לדוג': $A \to B$ נניח $\neg A$ ונגיע לסתירה.

(ב) נוכיח טענה שקולה - Contra-positive

ונראה שיטות הוכחה נוספות בהמשך.

דוג' מילולית: כדי להוכיח את הטענה שהגובה שלי נמוך מ-3 מ'. נניח שאני גבוה מ-3 מ' ונקווה להגיע לסתירה

לדוג' - אז הגובה שלי לפחות 3 מ' ולכן הראש שלי מגיע לתקרה, אבל - הראש שלי לא מגיע לתקרה ⇐ סתירה.

בודק אם

פרדיקט -

הגד: פונק' שתלויה במשתנה (בשונה מאטומים) דוגמ: $S(x) \leftarrow x$ האם סטודנט לאוניברסיטה.
הבהרה: $S(x)$ יקבל ערך T אם x סטודנט לאוניברסיטה.

הערה חשובה: ערך ה-T/F של הפרדיקט תלוי בהצבת המשתנה שלו.

דוג: $S(x) \leftarrow$ פרדיקט שבודק אם x הוא מס' זוגי: עבור $x=2$ $T \equiv S(2)$.
עבור $x=3$ $F \equiv S(3)$.

הערה: יש פרדיקטים שניתן להציב בהם יותר מערך אחד.

דוג: $S(x,y) \leftarrow$ פרדיקט שבודק אם $x<y$.

כמתים:

1. **כמת לכל:** מסומן: $\forall$ 2. **כמת קיים:** מסומן: $\exists$ .. הכמתים אומרים לנו מתי הטענה נכונה.

דוגמאות: 1. כל סטודנט הוא יצור חרוץ. כדי להוכיח אותה צריך לעבור סטודנט סטודנט ולוודא שהוא חרוץ.
כדי להפריך אותה מספיק למצוא סטודנט אחד שלא חרוץ.
2. קיים סטודנט חרוץ. כדי להוכיח אותה - מספיק למצוא סטודנט אחד חרוץ.
כדי להפריך אותה - צריך לעבור סטודנט סטודנט ולהראות שכולם לא חרוצים.

שלילת פסוקים:

נתחיל בשאלה - מה השלילה של המשפט: "לכל פר יש מספר המתאים לו".

כמתים:

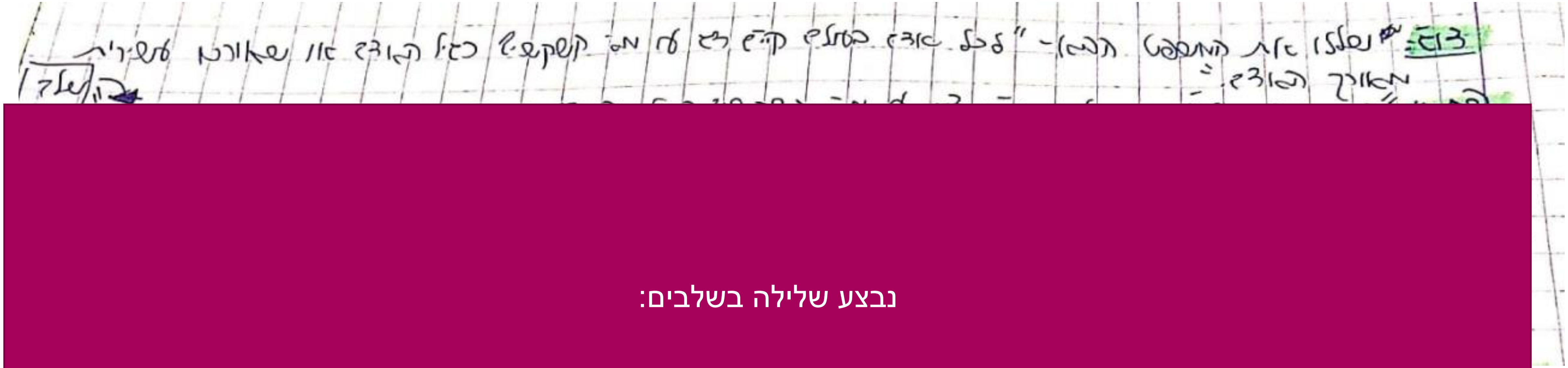
1. **כמת לכל:** מסומן: $\forall$ 2. **כמת קיים:** מסומן: $\exists$ .. הכמתים אומרים לנו אם הטענות נכונות.

[illegible]: 1. כל סטודנט הוא - יצור חרוץ. כדי להוכיח אותה צריך לעבור סטודנט סטודנט ולוודא שהוא חרוץ.
כדי להפריך אותה מספיק למצוא סטודנט אחד שלא חרוץ.
2. קיים סטודנט חרוץ. כדי להוכיח אותה - מספיק למצוא סטודנט אחד חרוץ.
כדי להפריך אותה - צריך לעבור סטודנט סטודנט ולהראות שכולם לא חרוצים.

תשובה: קיים סיר שכל המכסים לא מתאימים לו.

שלילת פסוקים:

תרגיל השאלה - מה השלילה של המשפט: "לכל סיר יש מכסה המתאים לו".
חוק שלילה של פסוק לוגי: הכמתים לכל וקיים מתחלפים זה עם זה והשלילה עוברת לגוף השלילה נית
נחשב לפי טאוטולוגיה + טבלאות אמת



נבצע שלילה בשלבים:

[illegible]: שללו את המשפט (הטענה) - "לכל אדם בעולם קיים דג לו מס' קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם."

פתרון: קיים אדם ~~[illegible]~~ כך שלכל קיים דג לו מס' קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם"

שלב 1

דוגמה: *שללו את המשפט (הטענה) - "לכל אדם בעולם קיים דג לו מס' קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם."

פתרון: "קיים אדם כך שלא קיים דג לו מס' קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם" שלב 1

"קיים אדם כך שלכל הדגים בעולם זה נכון שלא יש לו מס' קשקשים כגיל האדם או שאורכו עשירית מאורך האדם" שלב 2

דוג': נשלול את המשפט (הנ"ל) - "לכל אדם בעולם קיים דג לו מה קשקשים בגודל הגוף או שאורכו עשירית מאורך הגוף."

פתרון: "קיים אדם ~~בעולם~~ כך שלא קיים דג לו מה קשקשים בגודל הגוף או שאורכו עשירית מאורך הגוף" — שלב 1

"קיים אדם כך שלכל דג בעולם (זה) נכון ש(יש לו מה קשקשים בגודל הגוף או שאורכו עשירית מאורך הגוף") — שלב 2

"קיים אדם כך שלכל דג בעולם יש מה קשקשים שגודלם שונה מהגודל שלו וגם שאורכם שונה מעשירית מאורך הגוף". — שלב 3

הגדרה: סדר הכמתים חשוב.

דוגמה: "לכל מס' טבעי קיים מס' שגדול ממנו."

סימן למס' טבעיים

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : n < m$

סימן שייכות

טענה נכונה

לעומת זאת - אם נחליף את סדר הכמתים נקבל - "קיים מס' טבעי: שגדול מכל המספרים"

$\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} : m < n$

זו כמובן טענה לא נכונה.

תרגיל: הטענה: "כלב נובח אינו נושך" $\longleftrightarrow$ "כלב נושך אינו נובח"

צורה פורמלית - לגבי כל כלב מתקיים: (כלב נובח אינו נושך) $\longleftrightarrow$ (כלב נושך אינו נובח)

בתוספת כמתית.

נוכיח את הטענה.

פתרון: O = קב' הכלבים A = קב' הכלבים הנובחים B = קב' הכלבים הנושכים.

הוכחה:

$$\forall x \in O : \left(\left(\underbrace{x \in A}_{p} \to \underbrace{x \notin B}_{q} \right) \longleftrightarrow \left(x \in B \to x \notin A \right) \right)$$

נסמן - את הפסוקים באופן הבא:

$\neg q : x \in B$

ונמצא זאת - $\neg p : x \notin A$

ולכן - $\neg q \to \neg p$

$$\forall x \in O : (p \to q) \longleftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

כלומר - קיבלנו

ואכן - מתקיים על פי contra-positive. מש"ל

אם יש זמן...אחרת שיעורי בית ☺

תרגיל: הוכיחו/הפריכו:

סימן מחלק את.

$$\neg\left(\forall a\in\mathbb{N}\ \exists b\in\mathbb{N}\ \left(a|b \to (a\le b \wedge a+b<a\cdot b)\right)\right)$$

פתרון: ראשית- נבנה את הטענה אומרת:

תזכורת: $(A\to B)\equiv \neg A\vee B$

$$\exists a\in\mathbb{N}\ \forall b\in\mathbb{N}:\underbrace{\neg\left(a|b \to (a\le b\wedge a+b<a\cdot b)\right)}_{\text{נסמן הביטוי הזה ב-}(*)}$$

וניעזר בתזכורת.

$$(*):\ \neg\left(\neg(a|b)\vee(a\le b\wedge a+b<a\cdot b)\right)\equiv\left(a|b\wedge\underbrace{\neg(a\le b\wedge a+b<a\cdot b)}_{\heartsuit}\right)\equiv$$

לפי דה מורגן

לפי דה מורגן ♡

$$\left(a|b\wedge(a>b\vee a+b\ge a\cdot b)\right)$$

נציב ונקבל -

$$\exists a\in\mathbb{N}\ \forall b\in\mathbb{N}:\left(\overbrace{a|b}^{T}\wedge(\overbrace{a>b}^{F}\vee a+b\ge a\cdot b)\right)$$

נשים ♡ שבאופן $a|b\Rightarrow a\le b$. כלומר- $a>b$ תמיד F

ולכן- מה שנותר לבדוק לפי הגדרת מחלק $a+b\ge a\cdot b$. כלומר האם קיים איזשהו מס' טבעי עבור כל $\mathbb{N}\ni$

$a+b\ge a\cdot b$ תשובה: $\boxed{\text{כן}}$ קיים a טבעי. עבור $a=1$ נציב ונקבל

$1+b\ge b$ ✓ סוף-מתקיים. **מוכח**

בהצלחה!!!