

תרגיל 8-פיתרון

1. א. צריך לבחור חברה, גודל ו-עם/בלי סחוג:
לפי עיקרון המכפלה נקבל שה"כ $30=2 \times 3 \times 5$

ב. ישנן 15 אפשרויות ל"עם סחוג" ו-15 אפשרויות ל"בלי סחוג". לכן, לפי עיקרון המכפלה:
 $225=15 \times 15$

ג. יש $10=2 \times 5$ אפשרויות לקופסא מכל גודל, לכן, לפי עיקרון המכפלה: $1000=10 \times 10 \times 10$

2. א. אם מתייחסים לאותיות PEPPER כאותיות שונות ישנם 6! סידורים, וצריך לחלק בסידורים

$$\frac{6!}{3!2!} = 60 \text{ :E-P}$$

ב. כמו ב-א', יש $\frac{11!}{2!2!2!}$ סידורים.

ג. מתייחסים ל-EE,RR,AA באותיות בודדות. שה"כ יש 8 "אותיות" ונוריד את הסידורים הפנימיים של

$$N : \frac{8!}{2!}$$

3. א. צריך לבחור צרפתי, איטלקי ואנגלי. לפי עיקרון המכפלה: $350=5 \times 10 \times 7$.

ב. האפשרויות לבחירת שני לאומים הן: (צרפתי, איטלקי), (צרפתי, אנגלי), (איטלקי, אנגלי), ואין חשיבות לסדר הלאומים. לכן לפי עיקרון הסכום והמכפלה: $7 \times 10 + 7 \times 5 + 10 \times 5 = 155$.

ג. לפי עיקרון הסכום: $\binom{7}{3} + \binom{10}{3} + \binom{5}{3}$ כי בוחרים 3 אנגלים או 3 צרפתים או 3 איטלקים.

ד. נחשב את המאורע המשלים והוא ששלושת הנבחרים בעלי לאום זהה (סעיף ג) או שהם משלושה לאומים שונים (סעיף א). מספר האפשרויות לבחירת 3 אנשים בלי מיגבלה (היוניברסל) הוא:

$$\binom{7+10+5}{3} \text{ ולכן המאורע המבוקש הוא: } \binom{22}{3} - \left(\binom{7}{3} + \binom{10}{3} + \binom{5}{3} \right) - 350$$

$$4. \text{ א. } \binom{4}{2} \binom{3}{1}$$

ב. המאורע המשלים הוא שאף כדור לא צהוב, כלומר, שלושה ירוקים: $\binom{7}{3} - \binom{4}{3}$

ג. שני ירוקים וצהוב או שני צהובים וירוק:

$$\cdot \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1}$$

5. א. מספר שמתחלק ב-2 חייב להסתיים ב-2, לכן יש 3^5 אפשרויות ל-5 ספרות משמאל.

ב. מתחלקים ב-3: סכום כל הספרות חייב להתחלק ב-3. מכיוון ש-9 ו-3 מתחלקים ב-3, סכום כל ה-2-ים חייב להתחלק ב-3. לכן יש 0 או 3 או 6 -2-ים:

$$2^6 + \binom{6}{3} \cdot 2^3 + 1 = 225$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$0 \quad 3 \quad 6$$

2-ים 2-ים 2-ים

כולל

בחירת

מקום

בישבילם

ג. מתחלקים ב-6: הסיפורה האחרונה חייבת להיות 2 כי המספרים מתחלקים גם ב-2 וגם ב-3. בנוסף, יש עוד שני 2-ים או שכולם 2:

$$1 + \binom{5}{2} 2^3$$

$$\downarrow \quad \searrow$$

$$\text{כולם} \quad \text{בחירת}$$

$$2 \quad 2$$

מקום

לשני

2-ה

הנוספים

6. א. בחירת n קלפים לערימה הראשונה קובע את הקלפים שישלחו לערימה השניה: $\binom{2n}{n}$.

ב.

$$\binom{4}{2} \binom{2n-4}{n-2} = 6 \binom{2n-4}{n-2}$$

↓

בחירת שני הקלפים בערימה

הראשונה מתוך 1, ..., 4

ג.

$$2 \times 4 \times \binom{2n-4}{n-1}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 בחירת בחירת בחירת
 הערימה הקלף $n-1$
 ממנה הבודד קלפים
 מגיע
 הקלף
 הבודד

$$\frac{6 \binom{2n-4}{n-2}}{2 \times 4 \times \binom{2n-4}{n-1}} = \frac{3}{4} \frac{n-1}{n-2} \quad .7$$

$\left. \begin{array}{l} n=5 \text{ יש שוויון} \\ n < 5 \text{ סעיף ב גדול יותר} \\ n > 5 \text{ סעיף ג גדול יותר} \end{array} \right\} \text{לכן}$

7. כמו לפזר m כדורים ב- $n+1$ תאים כך שאף תא לא ריק, פרט אולי לתא הראשון והאחרון. שקול למספר הפתרונות של:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = m \quad \text{כאשר} \quad \begin{cases} x_i \geq 0, i=1, n+1 \\ x_i \geq 1, \quad O.W. \end{cases} \text{ אשר שקול למספר הפיתרונות של}$$

$$\binom{m-n+1+n}{n} = \binom{m+1}{n} \quad \text{שהוא: } x_i \geq 0 \quad \forall i \text{ כאשר } x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = m - (n-1)$$

8. כמו לסדר $r-1$ ימים ו- $n-r$ ימים כך שאין שני אחדים ברצף (ז"א $i \in \{1, \dots, n\}$ שנבחר יקבל את הערך-1, ו- $i \in \{1, \dots, n\}$ שאינו נבחר יקבל את הערך-0). כל מיקום של 1 מסמן את המספר מ-

$$\{n, \dots, 1\} \text{ שנבחר. לכן יש: } \binom{n-r+1}{r} \text{ אפשרויות לפי שאלה 7.}$$

9. א. בוחרים 8 אנשים מתוך 14 ומסדרים אותם סביב השולחן הראשון! (8-1) צריך לסדר את ה-6 הנותרים סביב השולחן השני! (6-1)

$$\text{סה"כ, כאשר לוקחים בחשבון את בחירת ה-8 מ-14 הראשונים (היתר יקבעו ע"פ זה): } \binom{14}{8} 7! 5!$$

$$\text{ב. } \binom{14}{8} 7! 6!$$

01. א. מספר הפיתרונות ל-: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300, x_i \geq 0$

$$\binom{300+4-1}{4-1}$$

ב.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 300, x_i \begin{cases} \geq 60, i=1 \\ \geq 80, i=2 \\ \geq 45, i=3 \\ \geq 0, i=4 \end{cases}$$

שקול ל-

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 300 - 60 - 80 - 45, y_i = \begin{cases} x_i - 60 \geq 0, i=1 \\ x_i - 80 \geq 0, i=2 \\ x_i - 45 \geq 0, i=3 \\ x_i \geq 0, i=4 \end{cases}$$

לכן:

$$\binom{115+4-1}{4-1}$$