1. הוכח את הזהות הבאה:

$$a!b! = \sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (-1)^i \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$$

רמז: נתונים a כדורים שחורים, b כדורים לבנים וכדור כחול אחד. כמה אפשרויות יש לסדר כך שהכדורים יופיעו בסדר הבא: כדורים לבנים, כדור כחול, כדורים שחורים?, היעזרו בהכלה והדחה!

פיתרון אגף שמאל מהרמז אומר בכמה אפשרויות אפשר לסדר כך שהכחול יופיע אחרי הכדורים הלבנים ולפני הכדורים השחורים. את הכדורים השחורים יש $b!$ אפשרויות לסדר בתוך עצמם ובאופן דומה יש $a!$ אפשרויות לסדר את הכדורים הלבנים בתוך עצמם.

אגף ימין מן הרמז: ראשית נגדיר קבוצה אוניברסלית U שתהיה אוסף האפשרויות לסדר כך שהכחול אחרי הלבנים. נקבל ש-$|U| = \frac{(a+b+1)!}{a+1}$, כי צריך לסדר את b השחורים ב-$(a+b+1)$ מקומות, שזה ניתן ב-$\frac{(a+b+1)!}{(a+1)!}$ (בלי חזרה ועם סדר), ואז להכפיל ב-$a!$ האפשרויות לסדר את a הכדורים הלבנים, כאשר הכחול יהיה בתא האחרון שנשאר אחרי סידור הלבנים. כעת אנו נדרשים להגדיר את הקבוצות A_i עבור $0 \leq i \leq b$ באופן הבא: נסמן ב A_i את קבוצת האפשרויות לסדר את הכדורים כך שהכדור הכחול יופיע אחרי הלבנים וגם אחרי i כדורים שחורים לפחות (שימו לב שכבר בהגדרת A_i החיתוך נכנס, כי הוא צריך להיות לפחות אחרי i שחורים, ולא דיברנו על שחורים ספציפיים). נקבל ש-$|A_i| = \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$. הסבר: אנו צריכים לסדר את $b-i$ השחורים ב-$a+b+1$ מקומות (כי הם הכדורים שאין עליהם דרישות), ואז במקומות הנותרים לסדר ב-$a+i$ הראשונים את הלבנים ו-i השחורים, ולכחול כבר אין ברירה. לכן בדומה להסבר על הקבוצה האוניברסלית נקבל $|A_i| = \frac{(a+b+1)!}{(a+i+1)!} \cdot (a+i)!$, ולכן בסה"כ, נוסחת ההכלה וההדחה אומרת שמספר האפשרויות לסידור לבנים, כחול, שחורים הוא:

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} (-1)^i \frac{(a+b+1)!}{a+i+1}$$