בוחן אלגברה לינארית תשע"ד

ענו על כל 4 השאלות. משך הבוחן 90 דקות.
יש לענות על כל שאלה בעמודים נפרדים- לכתוב שם+ת.ז.+שם המרצה בראש כל דף.

1. נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. לאחר ביצוע הפעולות שורה האלמנטריות הבאות (בסדר הנתון) מתקבלת מטריצת היחידה:

   (א) $R_1 \leftrightarrow R_3$
   (ב) $2R_1 + R_3 \to R_3$
   (ג) $2R_2 \to R_2$

   ענו על הסעיפים הבאים:

   (א) מצאו את A^{-1} באופן מפורש. (12 נקודות).
   (ב) בטאו את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. (13 נקודות).

   פתרון:

   (א) נמצא את ההופכית של A בעזרת דירוג מטריצה. כזכור, עם פעולות שורה מדרגות את A למטריצת היחידה, הפעלת אותן שורות מדרגת את מטריצה היחידה ל A^{-1}. לכן נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (ב) נפעיל את הפעולות ההופכיות לפעולות מסעיף הקודם בסדר ההפוך (או לחלופין נדרג את A^{-1} שמצאנו יחד עם I_3 לצורה הקנונית) ונקבל את A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. הוכיחו כי אוסף כל הוקטורים $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ המקיימים

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = -2x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -x_3 \end{cases}$$

הוא תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^4$. מצאו לה קבוצה פורשת. (**25 נקודות**).

פתרון: נשים לב, שנתנונה לנו מערכת הומוגנית של 2 משוואות ב 4 נעלמים, וכידוע אוסף כל הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא תת-מרחב. על מנת למצוא קבוצה פורשת נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה. נשים לב שהמערת שלנו (לאחר העברת אגפים) שקולה למערת

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

נחליף את השורות ונחסר את המשוואה הראשונה כפול 3 מהשניה ונקבל:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

נחבר את המשוואה הראונה והשניה ונחלק את השניה 3 ונקבל:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

לאחר הצבה $x_3 = s, x_4 = t$ שלפתרון הכללי יש צורה $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(s + t, -\frac{2}{3}s - \frac{2}{3}t, s, t\right)$ והוא נפרש על ידי הוקטורים $\left(1, -\frac{2}{3}, 1, 0\right)$ ו $\left(1, -\frac{2}{3}, 0, 1\right)$.

3. מצאו את החיתוך של תתי המרחבים הבאים: $U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W = span\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. (**25 נקודות**).

פתרון: אנו מעוניינים בכל הצירופים הלינאראיים של $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שניתן לבטא אותם גם כצירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. במילים אחרות, אנו מעוניינים למצוא את כל הזוגות α, β <u>או</u> a, b כך שלמשוואה

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

יש פתרון (אם יש פתרון עבור α, β זה אומר שיש פתרון עבור a, b ולהיפך, ולכן מספיק למצוא רק את α, βאו את a, b). נעביר, אגף נשים במטריצה ונדרג. נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

למשוואה יש פתרון רק אם $\alpha = 0$. (β יכול לקבל כל ערך). לכן הפתרון הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $span$.

4. שאלה הבאה יש קשר בין הסעיפים.

(א) הוכיחו עבור מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם $AB = AC = I$ אזי $B = C$. (5 נקודות).

(ב) נתונה מערכת המשוואות הבאה
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_4 + a_{13}x_7 = 1 \\ a_{11}x_2 + a_{12}x_5 + a_{13}x_8 = 0 \\ a_{11}x_3 + a_{12}x_6 + a_{13}x_9 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_4 + a_{23}x_7 = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_5 + a_{23}x_8 = 1 \\ a_{21}x_3 + a_{22}x_6 + a_{23}x_9 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_4 + a_{33}x_7 = 0 \\ a_{31}x_2 + a_{32}x_5 + a_{33}x_8 = 0 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_6 + a_{33}x_9 = 1 \end{cases}$$
הוכיחו כי למערכת יש לכל היותר פתרון אחד. (20 נקודות).

פתרון:

(א) הוכחנו שאם למטריצה ריבועית A קיימת מטריצה ריבועית B כך ש $AB = I$ אזי היא הפיכה. לכן אם $AB = I = AC$, קיימת A^{-1} ונקבל $B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = C$.

(ב) נשים לב שאת המערכת ניתן לרשום באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

מסעיף הקודם ראינו, שלמערכת כזאת קיים פתרון יחיד לכל היותר (אם A הפיכה הוא יחיד, אחרת לא קיים...) ולכן למערכת שלנו יש פתרון יחיד לכל היותר.

בהצלחה!