

תרגיל 6- מתמטיקה בדידה תש"ף

שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$A \cap B \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \quad (1)$$

$$A = A_1 \times A_2 : \text{ש } A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B \times C \quad (2)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \quad (3)$$

שאלה 2. נסתכל על $\mathbb{Q}_{\text{seq}} := \{x \subseteq \mathbb{Q} : x = \langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle\}$. נגדיר על \mathbb{Q}_{seq} יחס R באופן הבא:

$$xRy \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = L < \infty$$

א. הוכיחו או הפריכו כי R יחס שקילות, אם לא מצאו יחס שקילות R אחר על הקבוצה הנ"ל והשתמשו בו לסעיפים הבאים.

ב. יהי $x \subseteq \mathbb{Q}$ סדרה קבועה כלשהי. חשב את $[x]_R$.

ג. האם קבוצת המנה $\{[x]_R : x \in \mathbb{Q}_{\text{seq}}\}$ סופית? הראו זאת.

שאלה 3. הראו בכל אחד מהמקרים הבאים האם הקבוצה היא יחס על A , אם כן האם הוא יחס שקילות? הראו זאת.

א. $A = \mathbb{Q}$ ומתקיים: $q_0Rq_1 \Leftrightarrow |q_0 - q_1| \in \mathbb{N}$.

ב. $A = \mathbb{Z}$ ומתקיים: $aRb \Leftrightarrow 7 \mid (a - b)$.

ג. $A = \{(1, 1), (0, 5), (-1, 84), (23, -67), (-51, 100)\}$ ונגדיר: $R = \{(0, 5), (23, -67)\}$.

ד. $A = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cdots \times \mathbb{N}}_{n \text{ times}}$ ומתקיים: $xRy \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n x_k + y_k > 0$.

שאלה 4 (רשות).

א. יהי x, y תתי קבוצות אינסופיות של \mathbb{N} . נגדיר יחס \sim על $x \Delta y$ באופן הבא:

$$n \sim m \Leftrightarrow ([n, m] \cap x \Delta y \subseteq x \setminus y) \vee ([n, m] \cap x \Delta y \subseteq y \setminus x)$$

הראו כי זהו יחס שקילות.

ב. הראו כי אם x סופית, אזי קבוצת המנה $\{[a]_{\sim} : a \in x \Delta y\}$ סופית.

ג. ניקח $x = \{1, 6, 100\}$ ו- $y = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$ חשבו את כל מחלקות השקילות השונות שמגדיר היחס \sim .