

פונקציות מרוכבות תרגיל בית מס' 1

1. שרטטו את קבוצות הנקודות:

א. $|z-i| + |z+i| < 4$

ב. $a \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$

ג. $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$

ד. $|z+i| = 2|z-i|$

ה. $|z-1| > |z+i|$

ו. $|z-1+i| \leq 2$

2. על סמך הזהות $1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$, $(z \neq 1)$, הוכח כי

$$\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{2\sin(\theta/2)}$$

3. עבור $z = 1+2i$, מצא (בצורה של $a+ib$, ללא שימוש בנוסחת דה-מואבר):

א. $z^n, n \in \mathbb{N}$ (כאן a ו- b הינם טורים)

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $\frac{1}{z^n}, n \in \mathbb{N}$ (כאן a ו- b הינם טורים)

ד. $z^2 + 2z + 5 + i$

4. הוכח כי לכל $z \in \mathbb{C}$ $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \cdot |z|$

5. הוכח שמתקיים $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ עבור $a, b \in \mathbb{C}$ המקיימים $|a| < 1$ ו- $|b| < 1$.

6. מצא:

א. $\sqrt[3]{i}$

ב. $\sqrt[5]{1-i}$

ג. $\sqrt{3-i}$

ד. $\sqrt[4]{-1}$

7. תארו באמצעות אי שוויונות (או שוויונות) את התחומים/קווים הבאים:
- א. חצי מישור הנמצא מימין לציר המדומה .
 - ב. רביע הראשון .
 - ג. חצי מישור הנמצא מעל לציר הממשי ומרוחק ממנו למרחק לא פחות מ 2 .
 - ד. פס הכולל בתוכו את כל הנקודות המרוחקות מהציר המדומה למרחק קטן מ 1 .
 - ה. חצי עיגול בעל רדיוס 1 לא כולל מעגל עם מרכז בנקודה $z = 0$ הנמצא משמאל לציר המדומה .
 - ו. אוסף הנקודות הפנימיות למעגל שמרכזו ב $A(1,2)$ ורדיוסו 2 .

8. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^6 = 64$

ב. $5z + 2\bar{z} = 7 + 6i$

ג. $|z|^2 - 2z + 1 = 0$

בהצלחה!