תרגיל 9 פתרון

תרגיל 1. האם V הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$

.1 $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ z^2\geq x^2+y^2\right\}$

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}\in V,\ u=\begin{pmatrix}1\\1\\-7\end{pmatrix}\in V$$

אך החיבור

$$u+v=\begin{pmatrix}1\\1\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\notin V$$

.2 $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ 2^{3x+z}=8^{2x-y}\right\}$

פתרון.

תת מרחב, ראשית נשים לב ש-

$$\begin{gathered}2^{3x+z}=8^{2x-y}\\ \Updownarrow\\ 2^{3x+z}=8^{6x-3y}\\ \Updownarrow\\ 3x+z=6x-3y\\ \Updownarrow\\ 3x-3y-z=0\end{gathered}$$

לכן $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ 3x-3y-z=0\right\}$.

יהיו $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\in V, v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in V, \alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$u+\alpha v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+\alpha v_1\\u_2+\alpha v_2\\u_3+\alpha v_3\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned}3(u_1+\alpha v_1)-3(u_2+\alpha v_2)-(u_3+\alpha v_3) &=\\ 3u_1-3u_2-u_3+\alpha(3v_1-3v_2-v_3) &=\\ 0+\alpha\cdot 0 &=\\ 0\end{aligned}$$

לכן $u+\alpha v\in V$

תרגיל 2. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משווים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.

1. $\mathbb{R}^3\overset{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}2&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&5&12\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^3$.

$(0,0,1)\notin span\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$(0,0,1)=\alpha(2,0,4)+\beta(0,1,0)+\gamma(6,5,12)$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases}0=2\alpha+6\gamma\\1=4\alpha+12\gamma\end{cases}$$

והדבר לא אפשרי.

2. $\mathbb{R}_3[x]\overset{?}{=}span\left\{1,x+x^2,4x^3+x^2,2x\right\}$

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}_3[x]$.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_0\cdot 1+\left(a_2-\tfrac{1}{4}a_3\right)\cdot\left(x+x^2\right)+\tfrac{1}{4}a_3\cdot\left(4x^3+x^2\right)+\left(\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{2}a_3+\tfrac{1}{8}a_3\right)\cdot(2x)$$

3. $\mathbb{R}^{2\times 2}\overset{?}{=}span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\notin span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}\right\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 5\delta \\ 0 = 2\alpha - \beta + \gamma + 3\delta \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma + 3\delta \\ 1 = 2\alpha + \beta + 5\delta \end{cases}$$

והדבר לא אפשרי (מוזמנים לפתור ולבדוק).

תרגיל 3.

הצג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

כצירוף ליניארי של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון.

צריך למצוא $\alpha\beta\gamma\delta \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

וזה שקול לפתור את המערכת

$$\begin{cases} 1\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = 30 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 1\delta = 24 \\ 3\alpha + 4\beta + 1\gamma + 2\delta = 22 \\ 4\alpha + 1\beta + 2\gamma + 3\delta = 24 \end{cases}$$

ואחרי פתרון המערכת נקבל ש-

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3, \quad \delta = 4$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4.

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \{p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x)\}$$

תת קבוצה של V. ($p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש-U תת מרחב של V.

פתרון.

- שייכות של ווקטור ה-0: יהי $0(x)$ פולינום ה-0 והוא מקיים $0(x) = x \cdot 0'(x)$ לכן $\{0(x)\} \in U$

- סגירות: יהי $p(x), q(x) \in U$ פולינומים מקיימים $p(x) = x \cdot p'(x)$, $q(x) = x \cdot q'(x)$ ו-$\alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$p(x)+\alpha q(x) = x \cdot p'(x)+\alpha x \cdot p'(x) = x \cdot (p'(x) + \alpha \cdot p'(x)) = x \cdot (p(x) + \alpha \cdot p(x))'$$

מכאן $p(x) + \alpha q(x) \in U$ ולכן Uהוא תת מרחב של V

2. מצאו בסיס ומימד ל-U.

פתרון.

$$\begin{aligned} U &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = x \cdot \left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)\right\} &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = bx + 2cx^2 + 3dx^3\right\} &= \\ \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in V \mid a = 0, c = 0, d = 0\right\} &= \\ \{p(x) = bx : \ b \in \mathbb{R}\} &= \\ Span\{x\} \end{aligned}$$

המימד הוא 1